

Гамма и бета функции или интегралы Эйлера 2-го и 1-го родов

Интегралы, которые можно взять аналитически, представляют собой малую часть всех возможных интегралов. Известные интегралы Эйлера

1-го рода или бета функция

$$\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}dx = B(p; q) , \quad \text{при } p > 0 \text{ и } q > 0$$

и 2-го рода или гамма функция

$$\int_0^{+\infty} x^{p-1}e^{-x} dx = \Gamma(p) \quad \text{при } p > 0$$

как правило, вычисляются с помощью таблиц бета и гамма функций.

Представляем таблицу, в которую входят основные типы интегралов, сводящиеся к бета и гамма функциям, а также области существования этих интегралов. Как известно, существует связь между бета и гамма функциями:

$$B(p; q) = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)} \quad \text{при } p > 0, \quad q > 0$$

№	Тип интеграла	Замена, приводящая к интегралам Эйлера	Область определения интеграла	Интеграл, выраженный через бета функцию	Интеграл, выраженный через гамма функцию
1	$\int_0^a x^m \sqrt[n]{a^2 - x^2} dx ,$ $a > 0$	$t = \frac{x^2}{a^2}, x = a\sqrt{t}$ $dx = \frac{adt}{2\sqrt{t}}$ $x = 0 \Rightarrow t = 0$ $x = a \Rightarrow t = 1$	$m > -1;$ $n > 0$	$\frac{a^{m+\frac{n+2}{n}}}{2} B\left(\frac{m+1}{2}; \frac{n+1}{n}\right)$	$\frac{a^{m+\frac{n+2}{n}}}{2} \frac{\Gamma\left(\frac{m+1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{n+1}{n}\right)}{\Gamma\left(\frac{mn+3n+2}{2n}\right)}$

2	$\int_0^1 \left(\ln \frac{1}{x}\right)^p dx$	$\begin{aligned} t &= \ln \frac{1}{x}, x \\ &= -e^{-t} \\ dx &= -e^{-t} dt \\ x \rightarrow 0 &\Rightarrow t \rightarrow \infty \\ x = 1 &\Rightarrow t = 0 \end{aligned}$	$p > -1$	-----	$\begin{aligned} &\Gamma(p+1) \\ &\text{если } p = n \in \mathbb{N} \\ &\Gamma(n+1) = n! \end{aligned}$
3	$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n} x \cos^{2m} x dx$	$\begin{aligned} t &= \sin^2 x, \\ dx &= \frac{dt}{2\sin x \cos x} \\ x = 0 &\Rightarrow t = 0 \\ x = \frac{\pi}{2} &\Rightarrow t = 1 \end{aligned}$	$\begin{aligned} m &> -\frac{1}{2} \\ n &> -\frac{1}{2} \end{aligned}$	$\frac{1}{2} B\left(n + \frac{1}{2}; m + \frac{1}{2}\right)$	$\frac{\Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right) \Gamma\left(m + \frac{1}{2}\right)}{2\Gamma(n+m+1)}$
4	$\int_0^{+\infty} x^m e^{-x^n} dx$	$\begin{aligned} t &= x^n, x = t^{\frac{1}{n}} \\ dx &= \frac{1}{n} t^{\frac{1}{n}-1} dt \\ x = 0 &\Rightarrow t = 0 \\ x \rightarrow \infty &\Rightarrow t \rightarrow \infty \end{aligned}$	$\begin{aligned} m &> -1; \\ n &> 0 \end{aligned}$	-----	$\frac{1}{n} \Gamma\left(\frac{m+1}{n}\right)$
5	$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[n]{1-x^m}}$	$\begin{aligned} t &= x^m, x = t^{\frac{1}{m}} \\ dx &= \frac{1}{m} t^{\frac{1}{m}-1} dt \\ x = 0 &\Rightarrow t = 0 \\ x \rightarrow 1 &\Rightarrow t \rightarrow 1 \end{aligned}$	$\begin{aligned} m &> 0; \\ n &> 1 \end{aligned}$	$\frac{1}{m} B\left(\frac{1}{m}; \frac{n-1}{n}\right)$	$\frac{1}{m} \frac{\Gamma\left(\frac{1}{m}\right) \Gamma\left(\frac{n-1}{n}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{m} + \frac{n-1}{n}\right)}$
6	$\int_0^{\frac{\pi}{2}} (tgx)^n dx$	$\begin{aligned} tgx &= \sqrt{t}, \\ x &= \arctg \sqrt{t} \\ dx &= \frac{dt}{2\sqrt{t}(1+t)} \\ x = 0 &\Rightarrow t = 0 \\ x = \frac{\pi}{2} &\Rightarrow t \rightarrow \infty \end{aligned}$	$\begin{aligned} n &< 1; \\ n &> -1 \end{aligned}$	$\frac{1}{2} B\left(\frac{n+1}{2}; \frac{1-n}{2}\right)$	$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{1-n}{2}\right)}{\Gamma(1)} &= \\ &= \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{1-n}{2}\right)}{2} \end{aligned}$
7	$\int_0^{+\infty} \frac{\sqrt[n]{x} dx}{(1+x)^m}$	$\begin{aligned} t &= \frac{1}{1+x}, \\ x &= \frac{1}{t} - 1 \\ dx &= -\frac{dt}{t^2} \\ x = 0 &\Rightarrow t = 1 \\ x \rightarrow \infty &\Rightarrow t \rightarrow 0 \end{aligned}$	$\begin{aligned} m &\geq 1 \\ n &> 0 \end{aligned}$	$B\left(\frac{mn-n-1}{n}; \frac{n+1}{n}\right)$	$\frac{\Gamma\left(\frac{mn-n-1}{n}\right) \Gamma\left(\frac{n+1}{n}\right)}{\Gamma(m)}$

В таблице представлены замены, с помощью которых, данные интегралы сводятся к бета и гамма функциям. В качестве тренировки и для наилучшего понимания необходимо самостоятельно провести эти замены и получить

интегралы Эйлера 1-го и 2-го родов. При этом, особое внимание следует уделить области существования интегралов Эйлера. Ниже дано подробное вычисление интегралов представленных в таблице.

Первый интеграл из таблицы:

$$\begin{aligned} \int_0^a x^m \sqrt[n]{a^2 - x^2} dx &= \left| \begin{array}{l} t = \frac{x^2}{a^2}, x = a\sqrt{t} \\ dx = \frac{adt}{2\sqrt{t}} \\ x = 0 \Rightarrow t = 0 \\ x = a \Rightarrow t = 1 \end{array} \right| = \int_0^1 (a\sqrt{t})^m (a^2 - a^2 t)^{\frac{1}{n}} \cdot a \frac{dt}{2\sqrt{t}} = \\ &= \frac{a^m \cdot a^{\frac{2}{n}} \cdot a}{2} \int_0^1 t^{\frac{m}{2} - \frac{1}{2}} (1-t)^{\frac{1}{n}} dt = \frac{a^{m+1+\frac{2}{n}}}{2} \int_0^1 t^{\frac{m+1}{2}-1} (1-t)^{(\frac{1}{n}+1)-1} dt = \\ &= \frac{a^{\frac{mn+n+2}{n}}}{2} B\left(\frac{m+1}{2}; \frac{n+1}{n}\right) = \frac{a^{\frac{mn+n+2}{n}}}{2} \frac{\Gamma\left(\frac{m+1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{n+1}{n}\right)}{\Gamma\left(\frac{mn+3n+2}{2n}\right)} \end{aligned}$$

условие, при которых данный интеграл определен

$$\frac{m+1}{2} > 0; \quad \frac{n+1}{n} > 0 \Rightarrow m > -1; \quad n > 0$$

Второй интеграл из таблицы:

$$\begin{aligned} \int_0^1 \left(\ln \frac{1}{x}\right)^p dx &= \left| \begin{array}{l} t = \ln \frac{1}{x}, x = -e^{-t} \\ dx = -e^{-t} dt \\ x \rightarrow 0 \Rightarrow t \rightarrow \infty \\ x = 1 \Rightarrow t = 0 \end{array} \right| = \\ &= - \int_{+\infty}^0 t^p e^{-t} dt = \int_0^{+\infty} t^{(p+1)-1} e^{-t} dt = \Gamma(p+1) \end{aligned}$$

условие, при которых данный интеграл определен

$$p+1 > 0 \Rightarrow p > -1$$

Третий интеграл из таблицы:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n} x \cos^{2m} x dx = \left| \begin{array}{l} t = \sin^2 x \\ dx = \frac{dt}{2\sin x \cos x} \\ x = 0 \Rightarrow t = 0 \\ x = \frac{\pi}{2} \Rightarrow t = 1 \end{array} \right| = \int_0^1 t^n (1-t)^m \frac{dt}{2t^{\frac{1}{2}}(1-t)^{\frac{1}{2}}} =$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^1 t^{n-\frac{1}{2}} (1-t)^{m-\frac{1}{2}} dt = \frac{1}{2} \int_0^1 t^{n+\frac{1}{2}-1} (1-t)^{m+\frac{1}{2}-1} dt =$$

$$= \frac{1}{2} B\left(n + \frac{1}{2}; m + \frac{1}{2}\right) = \frac{\Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right) \Gamma\left(m + \frac{1}{2}\right)}{2\Gamma(n + m + 1)}$$

условие, при которых данный интеграл определен

$$n + \frac{1}{2} > 0; \quad m + \frac{1}{2} > 0 \Rightarrow m > -\frac{1}{2}; \quad n > -\frac{1}{2}$$

Четвертый интеграл из таблицы:

$$\int_0^{+\infty} x^m e^{-x^n} dx = \left[\begin{array}{l} t = x^n, x = t^{\frac{1}{n}} \\ dx = \frac{1}{n} t^{\frac{1}{n}-1} dt \\ x = 0 \Rightarrow t = 0 \\ x \rightarrow \infty \Rightarrow t \rightarrow \infty \end{array} \right] = \int_0^{+\infty} t^{\frac{m}{n}} e^{-t} \frac{1}{n} t^{\frac{1}{n}-1} dt = \frac{1}{n} \int_0^{+\infty} t^{\frac{m+1}{n}-1} e^{-t} dt = \frac{1}{n} \Gamma\left(\frac{m+1}{n}\right)$$

условие, при которых данный интеграл определен

$$\frac{m+1}{n} > 0 \Rightarrow m > -1; \quad n > 0$$

Пятый интеграл из таблицы:

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[n]{1-x^m}} = \left[\begin{array}{l} t = x^m, x = t^{\frac{1}{m}} \\ dx = \frac{1}{m} t^{\frac{1}{m}-1} dt \\ x = 0 \Rightarrow t = 0 \\ x = 1 \Rightarrow t = 1 \end{array} \right] = \int_0^1 (1-t)^{-\frac{1}{n}} \cdot \frac{1}{m} t^{\frac{1}{m}-1} dt = \frac{1}{m} \int_0^1 t^{\frac{1}{m}-1} (1-t)^{\left(1-\frac{1}{n}\right)-1} dt =$$

$$= \frac{1}{m} B\left(\frac{1}{m}; 1 - \frac{1}{n}\right) = \frac{1}{m} B\left(\frac{1}{m}; \frac{n-1}{n}\right) = \frac{1}{m} \frac{\Gamma\left(\frac{1}{m}\right) \Gamma\left(\frac{n-1}{n}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{m} + \frac{n-1}{n}\right)}$$

условие, при которых данный интеграл определен

$$\frac{1}{m} > 0 \quad \frac{n-1}{n} > 0 \Rightarrow m > 0; \quad n > 1$$

Шестой интеграл из таблицы:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} (tgx)^n dx = \left| \begin{array}{l} t g x = \sqrt{t}, x = \arctg \sqrt{t} \\ dx = \frac{dt}{2\sqrt{t}(1+t)} \\ x = 0 \Rightarrow t = 0 \\ x = \frac{\pi}{2} \Rightarrow t \rightarrow \infty \end{array} \right| = \int_0^{\infty} t^{\frac{n}{2}} \frac{dt}{2\sqrt{t}(1+t)} = \int_0^{\infty} t^{\frac{n-1}{2}} \frac{dt}{2(1+t)} =$$

$$= \left| \begin{array}{l} u = \frac{1}{1+t}, t = \frac{1-u}{u} \\ dt = \frac{-du}{u^2} \\ t = 0 \Rightarrow u = 1 \\ t \rightarrow \infty \Rightarrow u \rightarrow 0 \end{array} \right| = -\frac{1}{2} \int_1^0 \left(\frac{1-u}{u} \right)^{\frac{n-1}{2}} u \frac{du}{u^2} = \frac{1}{2} \int_0^1 (1-u)^{\frac{n-1}{2}} u^{-1-\frac{n-1}{2}} du =$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^1 u^{\frac{1-n}{2}-1} (1-u)^{\frac{n+1}{2}-1} du = \frac{1}{2} B\left(\frac{1-n}{2}; \frac{n+1}{2}\right) = \frac{1}{2} \frac{\Gamma\left(\frac{1-n}{2}\right) \Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\Gamma(1)} =$$

$$= \frac{\Gamma\left(\frac{1-n}{2}\right) \Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{2}$$

условие, при которых данный интеграл определен

$$\frac{1-n}{2} > 0 \quad \frac{n+1}{2} > 0 \Rightarrow n < 1; n > -1 \Rightarrow -1 < n < 1$$

Седьмой интеграл из таблицы:

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sqrt[n]{x} dx}{(1+x)^m} = \left| \begin{array}{l} t = \frac{1}{1+x}, x = \frac{1-t}{t} \\ dx = \frac{-dt}{t^2} \\ x = 0 \Rightarrow t = 1 \\ x \rightarrow \infty \Rightarrow t \rightarrow 0 \end{array} \right| = -\int_1^0 \left(\frac{1-t}{t} \right)^{\frac{1}{n}} t^m \frac{dt}{t^2} = \int_0^1 t^{(m-\frac{1}{n}-1)-1} (1-t)^{(\frac{1}{n}+1)-1} dt =$$

$$= B\left(\frac{mn-n-1}{n}; \frac{n+1}{n}\right) = \frac{\Gamma\left(\frac{mn-n-1}{n}\right) \Gamma\left(\frac{n+1}{n}\right)}{\Gamma(m)}$$

условие, при которых данный интеграл определен

$$m - \frac{1}{n} - 1 > 0 \quad \frac{n+1}{n} > 0 \Rightarrow m > 1 + \frac{1}{n}; n > 0 \Rightarrow m \geq 1; n > 0$$