МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ
„МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ
РАДИОТЕХНИКИ, ЭЛЕКТРОНИКИ И АВТОМАТИКИ“

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ

III семестр

УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКОЕ ПОСОБИЕ

Для студентов очного обучения
факультетов Электроники, ИТ, РТС

МОСКВА 2013

Составители: И.М.Аксененкова, Т.Р.Игонина, О.А.Малыгина,
Н.А.Фаркова, Н.С.Чекалкин

Редактор Н.С.Чекалкин

Рассматриваемые контрольные задания, разработанные коллективом кафедры высшей математики 2 МИРЭА, могут быть эффективным средством контроля уровня знаний студентов по теории рядов, входящей в программу II курса дневного отделения. Выполнение заданий позволит учащимся лучше подготовиться к зачетам и экзаменам МИРЭА. Типовой расчет выполняется студентами в письменном виде и сдается преподавателю до начала зачетной сессии. Приведенные в пособии вопросы к экзамену (зачету) могут быть уточнены и дополнены лектором.

Печатаются по решению редакционно-издательского совета университета.

Рецензенты: Т.Н. Бобылева,
В.П.Барашев

Контрольные задания напечатаны в авторской редакции
Подписано в печать 00.00.2013. Формат 60 x 84 1/16.
Усл. печ. л. 6,05. Усл.кр.-отт. 24,2. Уч.изд.л. 6,5.
Тираж 100 экз. С 000

Федеральное государственное бюджетное образовательное
учреждение высшего профессионального образования
„Московский государственный технический университет
радиотехники, электроники и автоматики “
119454, Москва, пр.Вернадского, 78

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ

III семестр

ВВЕДЕНИЕ

Данное учебно-методическое пособие состоит из двух частей.

В первой части представлено содержание контрольных мероприятий.

По курсу математического анализа в течение III семестра проводятся 2 контрольные работы и выполняется типовой расчет.

Контрольная работа №1

Тема. „Числовые ряды“.

Цель. Проверить усвоение знаний о признаках сходимости числовых рядов, проверить умения устанавливать сходимость (расходимость) рядов, исследовать ряд на абсолютную или условную сходимость.

Содержание. В контрольную работу входят задачи, идентичные задачам 1 – 7 из параграфа „Контрольные задания“.

Контрольная работа №2

Тема. „Функциональные ряды: область сходимости, ряд Тейлора, равномерная сходимость“.

Цель. Проверить усвоение знаний о типах сходимости функциональных рядов, о свойствах таких рядов, проверить умения представлять функцию с помощью ряда Тейлора, устанавливать равномерную сходимость, находить область сходимости, использовать ряды в приближенных вычислениях.

Содержание. В контрольную работу входят задачи, идентичные задачам 8 – 13 из параграфа „Контрольные задания“.

Типовой расчет

Тема. „Теория рядов“.

Цель. Проверить усвоение знаний и умений по теории рядов в соответствии с программой курса.

Содержание. В типовой расчет входят задачи из параграфа „Типовой расчет“.

Типовой расчет выполняется каждым студентом в отдельной тетради в соответствии с назначенным ему номером варианта. Студент объясняет решения задач преподавателю, отвечает на вопросы. Типовой расчет обязательно предъявляется в начале экзамена (зачета).

По итогам обучения проводится экзамен (зачет). В первой части пособия приводится список теоретических вопросов по курсу математического анализа (III семестр) и образец экзаменационного (зачетного) билета.

Отметим, что задачи из параграфа „Контрольные задания“— это задачи, которые можно использовать в качестве содержания домашних работ, организации самостоятельной работы учащихся. По усмотрению преподавателя предлагаемый список заданий этого параграфа может быть расширен.

Вторая часть учебно-методического пособия включает изложение теории рядов. Приводятся определения, формулируются основные теоремы курса. В некоторых случаях обсуждаются идеи доказательства теорем. В рамках каждого параграфа из второй части разбирается решение типовых заданий, описывается деятельность по анализу и дальнейшему изучению математического объекта.

Усвоение содержания второй части является необходимым условием успешного выполнения всех контрольных мероприятий.

Часть I. Содержание контрольных мероприятий

1 Теоретические вопросы к экзамену (зачету)

1. Числовой ряд, его сходимость. Примеры сходящихся и расходящихся рядов геометрическая прогрессия, гармонический ряд и другие.
2. Необходимый признак сходимости числового ряда.
3. Критерий сходимости числового ряда.
4. Признак сравнения положительных рядов, его предельная форма.
5. Признаки Даламбера и Коши сходимости рядов с положительными членами.
6. Интегральный признак Коши сходимости рядов с положительными членами. Сходимость рядов вида $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^{\alpha}}$.
7. Признак сходимости знакочередующегося ряда, оценка остатка.
8. Сходимость ряда из абсолютных величин членов знакопеременного ряда как достаточное условие сходимости самого ряда. Абсолютная и условная сходимость.
9. Свойства абсолютно сходящихся рядов перестановка членов, перемножение рядов. Перестановка членов условно сходящегося ряда.
10. Функциональный ряд, его область сходимости. Примеры.
11. Равномерная сходимость функционального ряда. Признак Вейерштрасса.
12. Непрерывность суммы функционального ряда.

13. Теорема о почленном интегрировании функциональных рядов.

14. Теорема о почленном дифференцировании функциональных рядов.

15. Степенной ряд. Теорема Абеля. Радиус сходимости степенного ряда. Поведение ряда на концах интервала сходимости.

16. Равномерная сходимость степенного ряда. Непрерывность суммы степенного ряда.

17. Теоремы о почленном интегрировании и дифференцировании степенных рядов. Бесконечная гладкость суммы степенного ряда.

18. Необходимое условие разложимости функции в степенной ряд. Единственность разложения. Ряды Тейлора и Маклорена.

19. Критерий разложимости функции в степенной ряд.

20. Достаточное условие разложимости функции в степенной ряд.

21. Применение степенных рядов к решению дифференциальных уравнений, к приближенным вычислениям значения функции и определенного интеграла.

22. Ряды Тейлора для основных элементарных функций e^x, $\sin x$, $\cos x$, $\ln(1+x)$, $(1+x)^m$.

23. Ортогональные и ортонормированные системы функций. Норма функции. Примеры ортогональных систем.

24. Ряд Фурье по ортогональной системе. Коэффициенты ряда Фурье.

25. Приближение функции в среднем. Сходимость в среднем ряда Фурье.

26. Экстремальное свойство коэффициентов Фурье. Его геометрическая интерпретация.

27. Неравенство Бесселя и равенство Парсеваля. Полнота и замкнутость ортогональной системы функций.

28. Интеграл Фурье в вещественной и комплексной форме. Преобразование Фурье.

29. Постановка краевых задач для уравнения колебаний струны.

30. Метод Фурье решения волнового уравнения.

31. Метод Даламбера решения волнового уравнения.

2 Примерный экзаменационный билет

1. Равномерная сходимость функционального ряда. Признак Вейерштрасса.

2. Исследовать числовой ряд на сходимость

$$a)\ \sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(\frac{n^2+5}{n^2+4}\right) \qquad b)\ \sum_{n=1}^{\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \frac{1}{4^n}$$

$$c)\ \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{3n-1}{n}\right)^n$$

3. Найти область сходимости степенного ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (x+6)^n}{(3n+1)\,3^n}.$$

4. Разложить в ряд Тейлора в окрестности точки $x_0 = 0$

$$y = x \operatorname{arctg} \frac{x}{2}.$$

5. Разложить в ряд Фурье функцию, заданную на полупериоде $(0,1)$ $Y = 2 - 4x$.

6. Методом Фурье найти решение уравнения колебаний струны $\dfrac{\partial^2 U}{\partial t^2} = \dfrac{\partial^2 U}{\partial x^2}$ длины $l = 2$, закрепленной на концах $U(0,t) = U(2,t) = 0$ и удовлетворяющей следующим начальным условиям

$$U(x,0) = 0, \quad \frac{\partial U(x,0)}{\partial t} = \left[\begin{array}{ll} 5x & 0 \le x \le 1 \\ 10 - 5x & 1 \le x \le 2 \end{array} \right.$$

3 Контрольные задания

Задача №1

Для данного числового ряда:

a) выписать три первых члена;

b) найти сумму n первых членов S_n;

c) доказать сходимость ряда, пользуясь непосредственно определением сходимости;

d) найти сумму ряда S.

№		№	
1	$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n(n+1)}$	2	$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{(2n-1)(2n+1)}$
3	$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{(3n-2)(3n+1)}$	4	$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n(n+3)}$
5	$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{(2n-1)(2n+5)}$	6	$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n(n+1)(n+2)}$
7	$\sum\limits_{n=2}^{\infty} \dfrac{2n+1}{n(n^2-1)}$	8	$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{2n+1}{n^2(n+1)^2}$

9	$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n}{(2n-1)^2(2n+1)^2}$	10	$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^{n+1}}{2^n}$
11	$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{3^n+2^n}{6^n}$	12	$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{3^n-2^n}{6^n}$
13	$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{2^n+(-1)^n}{3^n}$	14	$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{3^n+(-1)^{n+1}}{5^n}$
15	$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \operatorname{arctg}\left(\dfrac{1}{2n^2}\right)$	16	$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\sqrt{n}-2\sqrt{n+1}+\sqrt{n+2}\right)$

Задача №2

Установить расходимость данных рядов, используя необходимое условие сходимости.

№		№	
1	$\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1}$	2	$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n}{2n-1}$
3	$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{2n+5}{3n+7}$	4	$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n^2+1}{100n^2+17}$
5	$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \sqrt{\dfrac{n+1}{n+3}}$	6	$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \sqrt[3]{\dfrac{2n+5}{3n+7}}$
7	$\sum\limits_{n=2}^{\infty} \sqrt[n]{\dfrac{2}{3}}$	8	$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \sqrt[n]{\dfrac{3n+1}{10n+11}}$
9	$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n}{1000n+1}$	10	$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{3^n-2^n}{3^n+2^n}$
11	$\sum\limits_{n=1}^{\infty} n\ln\left(\dfrac{n}{n+100}\right)$	12	$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\dfrac{n+1}{n+2}\right)^{\frac{n}{2}}$
13	$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\sqrt{n^2+n+1}-\sqrt{n^2-n+1}\right)$	14	$\sum\limits_{n=1}^{\infty} n\sin\dfrac{3}{n}$

15	$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n}{\sqrt{n^2+2n}}$		

Задача №3

Исследовать на сходимость данные ряды с помощью признаков сравнения.

№		№	
1	$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n2^n}$	2	$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\ln n}{n}$
3	$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{2^n}{(n+1)\,3^n}$	4	$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{3n-1}$
5	$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{\sqrt{n^2+2n}}$	6	$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n+1}{n(n+2)}$
7	$\sum\limits_{n=2}^{\infty} \dfrac{1+n}{2+3n^2}$	8	$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\sqrt{n}-\sqrt{n-1}\right)$
9	$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{\sqrt{n^4+1}}$	10	$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\dfrac{n^2+1}{n^3+1}\right)^2$
11	$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^2-6n+10}$	12	$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{\ln(n+1)}$
13	$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\sqrt{n^2+n+1}-\sqrt{n^2-n+1}}{n}$	14	$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n}\sin\left(\dfrac{1}{n}\right)$
15	$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \operatorname{tg}\left(\dfrac{\pi}{4n}\right)$		

Задача №4

Исследовать на сходимость данные ряды с помощью признака Даламбера.

№		№	
1	$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n}$	2	$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^3}{3^n+1}$
3	$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{5^n}{n!}$	4	$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{3^n+2^n}$
5	$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \prod\limits_{j=1}^{n} \frac{3j-1}{4j-3}$	6	$\sum\limits_{n=1}^{\infty} n^2 \sin\left(\frac{\pi}{2^n}\right)$
7	$\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{(2n+1)!!}{3^n \cdot n!}$	8	$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!}$
9	$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^{100}}{2^n}$	10	$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!!}{n!}$
11	$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2^n-1}{n^3+1}$	12	$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{3^n-2^n}{3^n+4^n}$
13	$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^{10}}{2^n+n^{10}}$	14	$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{n!}$
15	$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(2n+1)!!}{n^n}$	16*	$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{e^n \cdot n!}{n^n}$

Задача №4.1

Исследовать на сходимость данные ряды.

№		№	
1	$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^3}{2^n+n}$	2	$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n n!}\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2}$

3	$\sum\limits_{n=2}^{\infty} \dfrac{2^n}{n\sqrt{\ln n}}$	4	$\sum\limits_{n=2}^{\infty} \dfrac{1}{(2n+5)\ln^3 n}$
5	$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{3n^3+\lvert\sin n\rvert}{n^4+1}$	6	$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{3^n+\operatorname{arctg}(3^n)}{n!}$
7	$\sum\limits_{n=2}^{\infty} \dfrac{5^n n!}{n^n-\left\lvert\cos\dfrac{\pi n}{6}\right\rvert}$		

Задача №5

Исследовать на сходимость данные ряды с помощью радикального признака Коши (1 – 10) и интегрального признака Коши (11 – 16).

№		№	
1	$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\dfrac{n}{2n+1}\right)^n$	2	$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\dfrac{n+1}{3n+4}\right)^n$
3	$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{\ln^n(n+1)}$	4	$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \arcsin^n\left(\dfrac{1}{n}\right)$
5	$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\dfrac{n+1}{n}\right)^{n^2}$	6	$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\dfrac{2n+1}{2n+3}\right)^{n^2}$
7	$\sum\limits_{n=2}^{\infty} \dfrac{1}{2^n}\left(\dfrac{n+1}{n}\right)^{n^2}$	8	$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\dfrac{n}{4n+1}\right)^{3n}$
9	$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{3^n}\left(\dfrac{n+1}{n}\right)^{n^2}$	10	$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\dfrac{n+1}{n}\right)^n \operatorname{arctg}\dfrac{1}{2^n}$
11	$\sum\limits_{n=2}^{\infty} \dfrac{1}{n\cdot\ln n}$	12	$\sum\limits_{n=2}^{\infty} \dfrac{1}{n\sqrt{\ln n}}$
13	$\sum\limits_{n=2}^{\infty} \dfrac{1}{n\ln^3 n}$	14	$\sum\limits_{n=3}^{\infty} \dfrac{1}{n\ln n(\ln\ln n)}$
15	$\sum\limits_{n=3}^{\infty} \dfrac{1}{n\ln n(\ln\ln n)^3}$	16	$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\dfrac{1+n}{1+n^2}\right)^2$

Задача №6

Доказать, что данные знакочередующиеся ряды не являются абсолютно сходящимися. Пользуясь теоремой Лейбница, доказать их условную сходимость.

№		№	
1	$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}}$	2	$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^{n}}{4n-1}$
3	$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n^2-2n+5}}$	4	$\sum\limits_{n=2}^{\infty} \dfrac{(-1)^{n}}{\ln n}$
5	$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^{n}}{n \ln n}$	6	$\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \ln\left(\dfrac{n+1}{n}\right)$
7	$\sum\limits_{n=2}^{\infty} (-1)^{n} \sin\dfrac{1}{n}$	8	$\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \operatorname{tg}\left(\dfrac{1}{\sqrt{n}+1}\right)$
9	$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^{n}}{n \cdot \operatorname{arctg} n}$	10	$\sum\limits_{n=3}^{\infty} \dfrac{(-1)^{n+1}}{n \ln n \ln\ln n}$
11	$\sum\limits_{n=3}^{\infty} \dfrac{(-1)^{n}}{n \ln n \sqrt{\ln\ln n}}$	12	$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^{n+1} n}{n^2+1}$
13	$\sum\limits_{n=2}^{\infty} \dfrac{(-1)^{n} \ln n}{n}$	14	$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^{n+1}}{n-\ln n}$
15	$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^{n} \operatorname{arctg} n}{n}$	16	$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^{n+1} n}{\sqrt{n^3+3}}$
17	$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^{n} \sqrt[3]{n}}{\sqrt{n}+1}$		

Задача №7

Исследовать на сходимость данные знакопеременные ряды.

№		№	
1	$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n\sqrt{n}}$	2	$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{(\ln 5)^n}$
3	$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n + 2\sin n}{n^2}$	4	$\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n n}{2n+5}$
5	$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} n^3}{2^n}$	6	$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n!}{(2n-1)!!}$
7	$\sum\limits_{n=2}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{2n+1}{3n+5}\right)^n$	8	$\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{2n+1}{2n+5}\right)^n$
9	$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(17n)\,\mathrm{arctg}(17n)}{\sqrt{n^3+1}}$	10	$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(5n)\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n-1}\right)}{\sqrt[4]{n^3}}$
11	$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(3n)\ln n}{\sqrt[4]{n^5}}$	12	$\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2^{n^2}}{n!}$
13	$\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{e^n n!}{n^n}$	14*	$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sin\left(\frac{\pi n}{4}\right)}{n}$
15*	$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sin\left(\frac{\pi n}{3}\right)}{\sqrt{n}}$	16*	$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(2n)}{n}$

Задача №8

Найти область сходимости данного функционального ряда.

№		№	
1	$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x}$	2	$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+x^n}$

3	$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \sin\dfrac{x}{2^n}$	4	$\sum\limits_{n=2}^{\infty} \dfrac{\sin(nx)}{n^2}$
5	$\sum\limits_{n=1}^{\infty} x^n \operatorname{tg}\left(\dfrac{x}{2^n}\right)$	6	$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\cos(nx)}{e^{nx}}$
7	$\sum\limits_{n=1}^{\infty} e^{-n^2x}$	8	$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{nx}{e^{nx}}$
9	$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\sin(nx^2)}{2^n}$	10	$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^2e^{n^2x^2}}$
11	$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^{nx}}$	12	$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\dfrac{2x}{x+1}\right)^n$
13	$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\dfrac{nx}{2nx^2+1}\right)^n$	14	$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{2^n}{x^n+1}$
15	$\sum\limits_{n=1}^{\infty} n\left(\dfrac{2x+1}{3x+5}\right)^n$	16	$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n+\operatorname{arctg}^2(nx)}$
17	$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{\sqrt{n}+\cos^2(nx)}$		

Задача №9

Пользуясь теоремой Вейерштрасса, доказать, что данный функциональный ряд сходится равномерно в указанной области.

№		
1	$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\sin(\pi nx)}{n\sqrt{n+x}}$	$x \in [0, +\infty)$
2	$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{\sqrt{n}} \sin\dfrac{x}{n}$	$x \in [0, \pi]$
3	$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\cos(nx)}{e^n+n^2x^2}$	$x \in (-\infty, +\infty)$

4	$\sum\limits_{n=2}^{\infty} \dfrac{x^n}{\sqrt{n^4+x^4}}$	$x \in [-1, 1]$
5	$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{x^n}{2^n\sqrt{n^4+x^2}}$	$x \in [-2, 2]$
6	$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\sin(3nx^2)}{x^2+3n^2}$	$x \in (-\infty, +\infty)$
7	$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\cos(nx)}{n\sqrt{n}}$	$x \in (-\infty, +\infty)$
8	$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{x^n}{n^2+x^2}$	$x \in [-1, 1]$
9	$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n\sqrt{1-x^{2n}}}{2^n}$	$x \in [-1, 1]$
10	$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n^2}{n!}\left(x^n+\dfrac{1}{x^n}\right)$	$x \in \left[\dfrac{1}{2}, 2\right]$
11	$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{x}{n^3+x^3}$	$x \in [0, +\infty)$
12	$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{nx}{3^n(1+n^2x^2)}$	$x \in (-\infty, +\infty)$
13	$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{nx^3}{n^6+x^6}$	$x \in (-\infty, +\infty)$
14	$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{nx}{n^6+x^6}$	$x \in (-\infty, +\infty)$
15	$\sum\limits_{n=1}^{\infty} x^2e^{-nx}$	$x \in [0, +\infty)$
16	$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{x^2}{n^4+x^4}$	$x \in (-\infty, +\infty)$

17	$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{nx}{n^4 + x^4}$	$x \in (-\infty, +\infty)$
18	$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n^2 x^2}{n^6 + x^6}$	$x \in (-\infty, +\infty)$
19	$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{nx^2}{n^5 + x^5}$	$x \in [0, +\infty)$
20	$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{nx^3}{2^n (n^5 + x^5)}$	$x \in [0, +\infty)$
21	$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n^{\frac{3}{2}} x^2}{n^5 + x^5}$	$x \in [0, +\infty)$

Задача №10

Найти радиус и интервал сходимости степенного ряда. Исследовать сходимость на концах интервала.

№		№	
1	$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{x^n}{n+1}$	2	$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{nx^n}{\sqrt{n^2+1}}$
3	$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{x^{2n-1}}{3^n n \sqrt{n+1}}$	4	$\sum\limits_{n=2}^{\infty} \dfrac{2^n x^n}{\sqrt{n(n^2+1)}}$
5	$\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \dfrac{2n+1}{n(n+1)} x^n$	6	$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\dfrac{2n}{3n+2}\right)^n x^n$
7	$\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \dfrac{x^{3n}}{\sqrt{n(n+1)}}$	8	$\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \dfrac{3n+1}{n(n+1)} (x+1)^n$
9	$\sum\limits_{n=1}^{\infty} (x-1)^n \sin \dfrac{1}{n+1}$	10	$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\operatorname{arctg} n}{2^n (n^2+1)} (x-5)^n$
11	$\sum\limits_{n=1}^{\infty} n \ln \left(\dfrac{n+3}{n}\right) (x+2)^n$	12	$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{2^n (x-3)^n}{\sqrt{n}}$

13	$\sum\limits_{n=2}^{\infty} \dfrac{3^n\left(x+\dfrac{1}{3}\right)^n}{n\ln^2 n}$	14	$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\dfrac{n}{n+3}\right)^{\frac{n}{2}}(x-2)^n$
15	$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\dfrac{2n}{2n+5}\right)^{3n}(x+4)^n$	16	$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(x+1)^{2n+1}}{n2^n\sqrt{n+1}}$
17	$\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n\dfrac{(x+10)^n}{\sqrt{n(n+1)}}$	18	$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n(x+100)^n}{\sqrt[3]{n^3+3}}$
19	$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\ln(n+1)}{n+1}(x+7)^n$	20	$\sum\limits_{n=1}^{\infty} (nx)^n$
21	$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^{n+1}(x+17)^n}{(2n-1)(2n-1)!}$	22	$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{2^n n! x^{2n}}{(2n)!}$
23	$\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n\dfrac{(x+11)^n}{n2^n\ln n}$	24	$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left[\left(\dfrac{n}{n+1}\right)^n x\right]^n$
25	$\sum\limits_{n=1}^{\infty} n!\left(\dfrac{n+2}{n}\right)^n$		

Задача №11

Используя разложение основных элементарных функций, получить разложения данных функций в степенные ряды по степеням переменной $(x-x_0)$. Указать области сходимости полученных рядов.

№		
1	$y=e^{-x}$	$x_0=0$
2	$y=e^{2x}$	$x_0=-1$
3	$y=e^{-x^2+6x}$	$x_0=3$

4	$y=(1-x)e^{-3x}$	$x_0=1$
5	$y=\dfrac{x}{3x-1}$	$x_0=0$
6	$y=\dfrac{x}{4x^2+3}$	$x_0=0$
7	$y=\dfrac{3x+2}{2x^2+x-3}$	$x_0=-2$
8	$y=\dfrac{2x-3}{2-5x-3x^2}$	$x_0=-1$
9	$y=\sin x\cos x$	$x_0=0$
10	$y=x\cos(3x)$	$x_0=0$
11	$y=\sin(x^2)$	$x_0=0$
12	$y=\sin^2 x$	$x_0=0$
13	$y=\sin^3 x$	$x_0=0$
14	$y=\cos(x^3)$	$x_0=0$
15	$y=\cos^2(x^2)$	$x_0=0$
16	$y=\cos^3 x$	$x_0=0$
17	$y=\mathrm{ch}\ x$	$x_0=0$
18	$y=\mathrm{sh}\ x$	$x_0=2$
19	$y=\ln(3-2x)$	$x_0=-4$

20	$y = \ln(2x^2 + 3x - 2)$	$x_0 = 1$
21	$y = \ln(6 - x - x^2)$	$x_0 = -2$
22	$y = \dfrac{1}{x^2}$	$x_0 = 2$
23	$y = \dfrac{3x+1}{(x-2)^2}$	$x_0 = 2$
24	$y = \dfrac{x+2}{(x+1)^2}$	$x_0 = -2$
25	$y = \sqrt[3]{x}$	$x_0 = 1$
26	$y = \sqrt{1 + x^2}$	$x_0 = 0$
27	$y = \dfrac{1}{\sqrt{4 + x^2}}$	$x_0 = 0$
28	$y = \operatorname{arctg} x$	$x_0 = 0$
29	$y = \arcsin x$	$x_0 = 0$
30	$y = \ln(x + \sqrt{1 + x^2})$	$x_0 = 0$
31	$y = \ln\sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}$	$x_0 = 0$
32	$y = \ln\left(\dfrac{2+x}{2-x}\right)$	$x_0 = -1$

Задача №12

Используя разложения элементарных функций в степенные ряды, вычислить суммы следующих числовых рядов:

№	
1	$2+\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n!}$
2	$\frac{1}{2}+\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2^n n!}$
3	$\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{2^n}{n!}$
4	$\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}$
5	$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n)!}$
6	$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}$
7	$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n2^n}$
8	$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{3^{n+1}(2n+1)}$
9	$\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}-\ldots+\frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)!}+\ldots$
10	$4+\frac{9}{2!}+\frac{27}{3!}+\ldots+\frac{3^n}{n!}+\ldots$
11	$1-\frac{1}{3!}+\frac{1}{5!}+\ldots+\frac{1}{(2n+1)!}+\ldots$
12	$1+\frac{1}{3!}+\frac{1}{5!}+\ldots+\frac{1}{(2n+1)!}+\ldots$
13	$2+\frac{2^3}{3!}+\frac{2^5}{5!}+\ldots+\frac{2^{2n+1}}{(2n+1)!}+\ldots$
14	$\frac{1}{2}+\frac{1}{2\cdot 2^2}+\frac{1}{3\cdot 2^3}+\ldots+\frac{1}{n\cdot 2^n}+\ldots$

15	$1-\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{5}-\ldots+\dfrac{(-1)^n}{2n+1}+\ldots$
16	$\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2^3 3}+\dfrac{1}{2^5 5}+\ldots+\dfrac{1}{2^{2n-1}(2n-1)}+\ldots$
17	$1-\dfrac{2}{3}+\dfrac{3}{3^2}-\ldots+\dfrac{(-1)^n(n+1)}{3^n}+\ldots$
18	$1+\dfrac{2}{5}+\dfrac{3}{5^2}+\ldots+\dfrac{(n+1)}{5^n}+\ldots$
19	$2+\dfrac{3}{2^2}+\dfrac{4}{2^3}+\ldots+\dfrac{n+1}{2^n}+\ldots$
20*	$\dfrac{1\cdot 2}{4}+\dfrac{2\cdot 3}{4^2}+\dfrac{3\cdot 4}{4^3}+\ldots+\dfrac{n(n+1)}{4^n}+\ldots$
21*	$\dfrac{1\cdot 2}{5}-\dfrac{2\cdot 3}{5^2}+\dfrac{3\cdot 4}{5^3}-\ldots+(-1)^{n+1}\dfrac{n(n+1)}{5^n}+\ldots$
22*	$1+\dfrac{2}{3!}+\dfrac{3}{5!}+\ldots+\dfrac{n+1}{(2n+1)!}+\ldots$
23*	$1+\dfrac{1}{3\cdot 8\cdot 1!}+\dfrac{3!!}{5\cdot 8^2\cdot 2!}+\ldots+\dfrac{(2n-1)!!}{(2n+1)\cdot 8^n\cdot n!}+\ldots$
24*	$1+\dfrac{1}{3\cdot 4\cdot 1!}+\dfrac{3!!}{5\cdot 4^2\cdot 2!}+\ldots+\dfrac{(2n-1)!!}{(2n+1)\cdot 4^n\cdot n!}+\ldots$
25*	$3+\dfrac{3^2}{3\cdot 8\cdot 1!}+\dfrac{3^3 3!!}{5\cdot 8^2\cdot 2!}+\ldots+\dfrac{3^{n+1}(2n-1)!!}{(2n+1)\cdot 8^n\cdot n!}+\ldots$

Задача №13

Вычислить приближенные значения определенного интеграла с точностью до 10^{-4}.

1	$\int\limits_0^{0.5}\dfrac{dx}{1+x^4}$	2	$\int\limits_0^{0.8}\dfrac{dx}{1+x^5}$

3	$\int\limits_0^{0.5} \frac{dx}{e^{x^2}}$	4	$\int\limits_0^1 \frac{e^x-1}{xe^x}\,dx$
5	$\int\limits_0^1 \frac{\sin(x^2)}{x}\,dx$	6	$\int\limits_0^1 \frac{\sin(x^2)}{x^2}\,dx$
7	$\int\limits_0^1 \frac{1-\cos x}{x^2}\,dx$	8	$\int\limits_0^{0.3} \frac{\ln(1+x)}{x}\,dx$
9	$\int\limits_0^{0.5} \frac{\ln(1+x^2)}{x^2}\,dx$	10	$\int\limits_0^{0.2} \frac{\operatorname{arctg} x}{x}\,dx$
11	$\int\limits_0^{0.5} \frac{\operatorname{arctg}(x^2)}{x^2}\,dx$	12	$\int\limits_0^{0.6} \sqrt[3]{1+x^2}\,dx$
13	$\int\limits_0^{0.8} \sqrt{1+x^5}\,dx$	14	$\int\limits_0^{0.5} \frac{1}{\sqrt{1+x^4}}\,dx$
15	$\int\limits_0^1 \cos(x^3)\,dx$		

Задача №14

В заданиях 1 – 10 разложить функцию, заданную на интервале, в ряд Фурье по косинусам и в ряд Фурье по синусам. При помощи полученных разложений вычислить суммы числовых рядов: $\sum\limits_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^2}$, $\sum\limits_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^4}$, $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}$.

№			№		
1	$y=2x-1$	$x\in(0,1)$	2	$y=4-2x$	$x\in(0,4)$
3	$y=3x-3$	$x\in(0,2)$	4	$y=2-4x$	$x\in(0,1)$
5	$y=2x-3$	$x\in(0,3)$	6	$y=6-4x$	$x\in(0,3)$

7	$y = x - 2$	$x \in (0, 4)$	8	$y = 1 - x$	$x \in (0, 2)$
9	$y = 2x - 5$	$x \in (0, 5)$	10	$y = 6 - 3x$	$x \in (0, 4)$

В заданиях 11, 12 разложить функцию, заданную на интервале, в ряд Фурье по косинусам. При помощи полученных разложений вычислить сумму числового ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{1}{4n^2 - 1}$. Проверить результат, вычислив сумму как предел частичных сумм.

11) $y = \sin \dfrac{x}{2}$, $x \in (0, \pi)$ 12) $y = \cos \dfrac{x}{2}$, $x \in (0, \pi)$

13) Разложить функцию $y = x^2$, $x \in (0, 1)$, в ряд Фурье по косинусам. При помощи полученного разложения вычислить суммы числовых рядов $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^{k+1}}{k^2}$, $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{1}{k^2}$, $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{1}{(2k+1)^2}$, $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{1}{k^4}$.

14) Разложить функцию $y = x^3$, $x \in (0, 1)$, в ряд Фурье по синусам. При помощи полученного разложения вычислить сумму числового ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{1}{k^6}$.

Задача №15

a) Разложить функцию $y = f(x)$, заданную на полупериоде $(0, l)$, в ряд Фурье по косинусам. Построить графики 2-ой, 3-ей частичных сумм. Записать равенство Парсеваля для полученного ряда.

b) Разложить функцию $y = f(x)$, заданную на полупериоде $(0, l)$, в ряд Фурье по синусам. Построить графики 2-ой, 3-ей частичных сумм.

c) Разложить функцию $y = f(x)$ в ряд Фурье, продолжая ее на полупериоде $(-l, 0)$ функцией, равной нулю. Построить графики второй, четвертой частичных сумм.

№		№	
1	$y=\begin{cases} 0, & 0<x<\dfrac{\pi}{3} \\ 1, & \dfrac{\pi}{3}<x\le\dfrac{2\pi}{3} \\ 0 & \dfrac{2\pi}{3}<x<\pi \end{cases}$	2	$y=\begin{cases} 1-x, & 0<x<1 \\ 0, & 1\le x\le 2 \\ 2-x & 2<x<3 \end{cases}$
3	$y=\begin{cases} 2-2x, & 0<x\le 1 \\ 0 & 1<x<\pi \end{cases}$	4	$y=\lvert x-1\rvert-1,\ \ 0\le x<2$
5	$y=5-2x,\ \ 0<x<3$		

Задача №16

Представить интегралом Фурье функцию, заданную на интервале $(0,+\infty)$, продолжив ее на всю числовую ось четным и нечетным образом.

№	
1	$f(x)=\begin{cases} 1, & 0<x<1 \\ \dfrac{1}{2}, & x=1 \\ 0 & x>1 \end{cases}$
2	$f(x)=\begin{cases} 1-x, & 0<x\le 1 \\ 0 & x>1 \end{cases}$
3	$f(x)=\begin{cases} 1-\dfrac{x}{2}, & 0<x\le 2 \\ 0, & x>2 \end{cases}$

4	$f(x)=\begin{cases} 2-3x, & 0<x\le\dfrac{2}{3} \\ 0 & x>\dfrac{2}{3}\end{cases}$
5	$f(x)=\begin{cases} 4x-1, & 0<x\le\dfrac{1}{4} \\ 0 & x>\dfrac{1}{4}\end{cases}$
6	$f(x)=\begin{cases} \sin x, & 0\le x\le\pi \\ 0 & x>\pi\end{cases}$
7	$f(x)=\begin{cases} \cos x, & 0<x<\pi \\ -\dfrac{1}{2}, & x=\pi \\ 0 & x>\pi\end{cases}$
8	$f(x)=e^{-x},\ \ x>0$

9) Найти косинус-преобразование Фурье функции $f(x)=\dfrac{1}{a^2+x^2}$, $a>0$, и представить ее интегралом Фурье на интервале $(0,+\infty)$.

10) Найти синус-преобразование Фурье функции $f(x)=\dfrac{1}{a^2+x^2}$, $a>0$, и представить ее интегралом Фурье на интервале $(0,+\infty)$.

11) С помощью полученных интегралов Фурье вычислить следующие несобственные интегралы:

$$\int\limits_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}\,dx,\ \int\limits_0^{+\infty}\frac{\cos x}{1+x^2}\,dx,\ \int\limits_0^{+\infty}\frac{\sin^3 x}{x}\,dx,\ \int\limits_0^{+\infty}\frac{x\sin x}{1+x^2}\,dx,\ \int\limits_0^{+\infty}\frac{\sin^2 x}{x^2}\,dx$$

Задача №17

Методом Фурье найти решение уравнения колебаний струны

$\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}$ длины $l = 2$, закрепленной на концах: $u(0,t) = u(2,t) = 0$ и удовлетворяющей следующим начальным условиям:

$$U(x,0) = f(x), \quad \frac{\partial U(x,0)}{\partial t} = \varphi(x).$$

№	$f(x)$	$\varphi(x)$
1	$\begin{cases} x, & 0 \le x \le 1 \\ 2-x, & 1 \le x \le 2 \end{cases}$	0
2	0	$2x - x^2,\ 0 \le x \le 2$
3	$\begin{cases} -2x, & 0 \le x \le 1 \\ 2(x-2), & 1 \le x \le 2 \end{cases}$	0
4	0	$x^2 - 2x,\ 0 \le x \le 2$
5	$\begin{cases} \frac{x}{3}, & 0 \le x \le 1 \\ \frac{2-x}{3}, & 1 \le x \le 2 \end{cases}$	0
6	0	$4x - 2x^2,\ 0 \le x \le 2$
7	$\begin{cases} -x, & 0 \le x \le 1 \\ x-2, & 1 \le x \le 2 \end{cases}$	0

№	$f(x)$	$\varphi(x)$
8	0	$\dfrac{x^2}{4}-\dfrac{x}{2},\ 0\le x\le 2$
9	$\begin{cases} 2x, & 0\le x\le 1 \\ 2(2-x), & 1\le x\le 2 \end{cases}$	0
10	0	$8x-4x^2,\ 0\le x\le 2$
11	$\dfrac{x^2}{2}-x,\ 0\le x\le 2$	0
12	0	$\begin{cases} -3x, & 0\le x\le 1 \\ 3(x-2), & 1\le x\le 2 \end{cases}$
13	$3x^2-6x,\ 0\le x\le 2$	0
14	0	$\begin{cases} \dfrac{x}{5}, & 0\le x\le 1 \\ \dfrac{2-x}{5}, & 1\le x\le 2 \end{cases}$
15	$4x-2x^2,\ 0\le x\le 2$	0
16	0	$\begin{cases} -\dfrac{2x}{3}, & 0\le x\le 1 \\ \dfrac{2(x-2)}{3}, & 1\le x\le 2 \end{cases}$

№	$f(x)$	$\varphi(x)$
17	$-\dfrac{x^2}{2}+x,\ 0\le x\le 2$	0
18	0	$\begin{cases} 5x, & 0\le x\le 1\\ 5(2-x), & 1\le x\le 2\end{cases}$
19	$\dfrac{x}{2}-\dfrac{x^2}{4},\ 0\le x\le 2$	0
20	0	$\begin{cases} -\dfrac{x}{2}, & 0\le x\le 1\\ \dfrac{(x-2)}{2}, & 1\le x\le 2\end{cases}$
21	$\begin{cases} \dfrac{x}{3}, & 0\le x\le 1\\ \dfrac{2-x}{3}, & 1\le x\le 2\end{cases}$	0
22	0	$4x-2x^2,\ 0\le x\le 2$
23	$\begin{cases} -x, & 0\le x\le 1\\ x-2, & 1\le x\le 2\end{cases}$	0
24	0	$\dfrac{x^2}{4}-\dfrac{x}{2},\ 0\le x\le 2$
25	$\begin{cases} 2x, & 0\le x\le 1\\ 2(2-x), & 1\le x\le 2\end{cases}$	0

4 Типовой расчет

Задача №1

Исследовать на сходимость числовой ряд.

№		№	
1	$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n^4}{4^n+n^2}$	2	$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{2^n}{(n+1)!+n}$
3	$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{2^n}{(n+1)\ln(n+1)}$	4	$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(n^3+3)\cos\frac{\pi}{4n}}{n\sqrt[5]{n^9+1}}$
5	$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n}{(n+1)!2^n}$	6	$\sum\limits_{n=2}^{\infty} \dfrac{1}{(n+2)\sqrt{\ln^3 n}}$
7	$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{2^n}{n!}\left(\dfrac{n}{n+1}\right)^{n^2}$	8	$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\sqrt[5]{3n^2+4}+n!}{\sqrt[5]{n^2+5n}+\sin 3n}$
9	$\sum\limits_{n=1}^{\infty} 3^n(2n+1)\left(\dfrac{2n}{2n+1}\right)^{n^2}$	10	$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \arcsin\dfrac{2n+1}{3n^3+n+5}$
11	$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{3^{-n}}{4n+1}\left(\dfrac{4n+1}{4n}\right)^2$	12	$\sum\limits_{n=2}^{\infty} \dfrac{1}{(3n+2)\ln^2 n}$
13	$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\dfrac{\sqrt{n}+2}{\sqrt{n}+3}\right)^{\sqrt{n^3}}\cos\dfrac{\pi n}{4}$	14	$\sum\limits_{n=1}^{\infty} (n+1)\,\mathrm{tg}\,\dfrac{n+2}{n^2+3}$
15	$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n^3}{2^n+2n}$	16	$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\ln(1+2^{-n})}{\mathrm{arctg}(n^{-2})}$
17	$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{\sqrt[3]{n}}\,\mathrm{arctg}\,\dfrac{\sqrt{n}+2}{\sqrt[3]{n^2+1}}$	18	$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{3+\lvert\sin 3^n\rvert}{3^n}$
19	$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n^2 2^n}{3^n+3}$	20	$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{5+\cos\frac{\pi n}{4}}{\left(\frac{\pi}{2}\right)^n}$
21	$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(e^{\frac{1}{\sqrt{n}}}-1\right)\sin\sqrt{\dfrac{n}{n^2+1}}$	22	$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{2^n n^2+2}{n^4}$
23	$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n!}{n^n+1}$	24	$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{9^n\sin\frac{\pi n^2}{2}}{(2n+1)!}$

25	$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \ln\left(\cos\dfrac{2\pi}{n}\right)$	26	$\sum\limits_{n=2}^{\infty} \dfrac{2^n}{n^3}\left(\dfrac{n}{n+1}\right)^{n^2}$
27	$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{2n^5+\operatorname{arctg} n^5}{n^3}$	28	$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{3^n+n^3}{n^5}$
29	$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\operatorname{arctg}\sqrt{n+2}}{(n+1)\ln^2(n+1)}$	30	$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{3\cdot 6\cdot\ldots\cdot(3n)}{4^n(n+1)!}\arcsin\dfrac{1}{2^n}$
31	$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{2n^2-\arccos\left(\frac{1}{2n^2}\right)}{n!}$		

Задача №2

Найти радиус и интервал сходимости степенного ряда. Исследовать сходимость ряда на концах интервала.

№		№	
1	$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{x^n}{n+1}$	2	$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{2^n x^n}{\sqrt{n(n^2+1)}}$
3	$\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n\dfrac{2n+1}{n(n+1)}x^n$	4	$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\dfrac{2n}{3n+2}\right)^n x^n$
5	$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^{n+1}x^{3n}}{\sqrt{n(n+1)}}$	6	$\sum\limits_{n=2}^{\infty} (-1)^{n-1}\dfrac{3n+1}{n(n+1)}(x+1)^n$
7	$\sum\limits_{n=1}^{\infty} (x-1)^n\sin\dfrac{1}{n+1}$	8	$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{2^n(x-3)^n}{\sqrt{n}}$
9	$\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n\dfrac{(x+10)^n}{\sqrt{n(n+1)}}$	10	$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\ln(n+1)}{n+1}(x+7)^n$
11	$\sum\limits_{n=2}^{\infty} (-1)^n\dfrac{(x+11)^n}{n2^n\ln n}$	12	$\sum\limits_{n=2}^{\infty} \dfrac{3^n(x-2)^{2n}}{n\ln n}$
13	$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \ln\left(\dfrac{n+2}{n}\right)(x+2)^n$	14	$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n(x-2)^{3n}}{\sqrt{n^3+2n-1}}$

15	$\sum\limits_{n=1}^{\infty} (2x-1)^n \operatorname{tg} \dfrac{1}{n}$	16	$\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \dfrac{(x-2)^{2n}}{n 2^n}$
17	$\sum\limits_{n=2}^{\infty} \dfrac{\ln n}{n\sqrt{n}} (x+1)^n$	18	$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\operatorname{arctg} n}{2^n(5n-2)} (x+3)^n$
19	$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n n}{\sqrt[3]{n^4+2n}} (x-2)^n$	20	$\sum\limits_{n=1}^{\infty} (3x+2)^n \sin \dfrac{1}{n+2}$
21	$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \ln\left(\dfrac{n+3}{n+1}\right)\left(\dfrac{x+1}{2}\right)^n$	22	$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(x-2)^n}{\ln(n+2)}$
23	$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n^n x^n}{(n+1)^n}$	24	$\sum\limits_{n=0}^{\infty} \left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)(x-2)^n$
25	$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{2^n}{2^n+3^n} x^n$	26	$\sum\limits_{n=1}^{\infty} (x-2)^{3n} \arcsin \dfrac{1}{\sqrt{n}}$
27	$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{x^n}{\sqrt{n}} \cos\left(\dfrac{\pi n}{2}\right)$	28	$\sum\limits_{n=1}^{\infty} n(2x-1)^n \operatorname{arctg} \dfrac{1}{n^2+1}$
29	$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(x+2)^n}{2^n+3^n}$	30	$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(n-\sqrt{n^2+1}\right) x^{3n}$

Задача №3

По признаку Вейерштрасса доказать равномерную сходимость функционального ряда на указанном промежутке.

№		
1	$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n^2}{(x+\frac{1}{n})^n}$	$x \in [2,3]$
2	$\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(1-\dfrac{1}{n}\right) \dfrac{1}{x^n}$	$x \in [-3,-2]$
3	$\sum\limits_{n=2}^{\infty} \dfrac{n+(-1)^n}{n(n-1)} \sin \dfrac{x}{\sqrt{n}}$	$x \in [-2,2]$

4	$\sum\limits_{n=2}^{\infty} \ln\left(1+\dfrac{x^n}{n^3}\right)$	$x \in [0,1]$
5	$\sum\limits_{n=1}^{\infty} e^{-(1-x\sqrt{n})^2}$	$x \in [1,2]$
6	$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n^3\big(\sqrt{2}+\sin(nx)\big)^n}{3^n}$	$x \in (-\infty,+\infty)$
7	$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n^2x}{2^n+x^n+1}$	$x \in [0,5]$
8	$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\sqrt{x+1}\cos(nx)}{\sqrt[3]{n^5+1}}$	$x \in [0,2]$
9	$\sum\limits_{n=1}^{\infty} x^{n!}$	$x \in \left[-\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2}\right]$
10	$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(n!)^2(x-3)^{n^2}}{2^{n^2}}$	$x \in [2,3]$
11	$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{x^n}{1+x^{2n}}$	$x \in [-3,-2]$
12	$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^{n+1}\operatorname{tg}^n x}{n(n+1)}$	$x \in \left[-\dfrac{\pi}{6},\dfrac{\pi}{6}\right]$
13	$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(x+\dfrac{(-1)^{n+1}}{n}\right)x^{n-1}$	$x \in \left[-\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2}\right]$
14	$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{3^{n^2}}{x^{n^2}}$	$x \in [4,5]$
15	$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n+\frac{1}{n}}{(x-1)^{2n}}$	$x \in [-2,-1]$
16	$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\dfrac{1}{x}+\dfrac{x}{n}\right)^n$	$x \in [3,5]$
17	$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(x+1)\sin^2(nx)}{n\sqrt{n+1}}$	$x \in [-3,0]$

18	$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n^{n+1}}{(x-4)^{n^2}}$	$x \in [1,2]$
19	$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \ln\left(1+\dfrac{x+1}{n\ln^2(n+1)}\right)$	$x \in [0,3]$
20	$\sum\limits_{n=2}^{\infty} \sin^n \dfrac{x\ln n}{x-n}$	$x \in [0,1]$
21	$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{2+(-1)^n}{x^{2n}}$	$x \in \left[\dfrac{3}{2},3\right]$
22	$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(\pi-x)\cos^2(nx)}{\sqrt[4]{n^7+1}}$	$x \in [0,\pi]$
23	$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n^2}{\ln^n(x-1)}$	$x \in [4,5]$
24	$\sum\limits_{n=1}^{\infty} n^2\sqrt{x+1}\,e^{-\frac{n}{x}}$	$x \in \left[\dfrac{1}{2},2\right]$
25	$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n^n}{n!}\sin\dfrac{\pi x^n}{2^n}$	$x \in \left[0,\dfrac{1}{2}\right]$
26	$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n^3x}{3^n+x^n+2}$	$x \in [0,4]$
27	$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{x^{2n}}{n\sqrt{n^3+x}}$	$x \in [0,1]$
28	$\sum\limits_{n=2}^{\infty} \ln\left(1+\dfrac{x^3}{n\ln^2 n}\right)$	$x \in [0,2]$
29	$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\sqrt[3]{x^2+4}\,\sin nx}{n\sqrt{n^4+1}}$	$x \in [0,2]$
30	$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(4-x)\cos^2 nx}{\sqrt{n^8+1}}$	$x \in [0,4]$

Задача №4

Используя разложение элементарных функций, получить разложения данных функций в степенные ряды по степеням переменной $(x - x_0)$. Указать области сходимости полученных рядов.

№		
1	$y = e^{2x}$	$x_0 = -1$
2	$y = \dfrac{2}{x^2 + x - 6}$	$x_0 = 0$
3	$y = \sin x \cos x$	$x_0 = 0$
4	$y = \ln(3 - 2x)$	$x_0 = -4$
5	$y = (1 - x)\, e^{-3x}$	$x_0 = 1$
6	$y = \dfrac{2x - 1}{(x - 2)(x - 3)}$	$x_0 = 1$
7	$y = x \cos 3x$	$x_0 = 0$
8	$y = \ln(2x^2 + 3x - 2)$	$x_0 = 1$
9	$y = \cos x \cos 5x$	$x_0 = 0$
10	$y = \dfrac{2x - 3}{2 - 5x - 3x^2}$	$x_0 = -1$
11	$y = e^{-x^2 + 6x}$	$x_0 = 3$
12	$y = \sin^2 x$	$x_0 = 0$
13	$y = \ln(x^2 + 5x + 6)$	$x_0 = 2$
14	$y = \dfrac{3x + 1}{2x^2 - 5x - 3}$	$x_0 = 0$

15	$y = \sin\, 2x \cos\, 2x$	$x_0 = 0$
16	$y = \sqrt{8 - x^2 + 2x}$	$x_0 = 1$
17	$y = (x - 1)\ln(2x - 3)$	$x_0 = 2$
18	$y = \dfrac{5 - 2x}{x^2 - 2x - 8}$	$x_0 = 1$
19	$y = \cos^2 \dfrac{x}{2}$	$x_0 = -1$
20	$y = (x - 2)\, e^{-x^2+4x}$	$x_0 = 2$
21	$y = \ln(6x - 5 - x^2)$	$x_0 = 3$
22	$y = \sin\, 3x \sin\, x$	$x_0 = 0$
23	$y = \dfrac{1 - e^{-x^2}}{x^2}$	$x_0 = 0$
24	$y = \ln \sqrt[3]{\dfrac{1 + 2x}{1 - x}}$	$x_0 = 0$
25	$y = \dfrac{x^2}{(x + 1)(x + 2)}$	$x_0 = 1$
26	$y = \cos\, x \sin^2 x$	$x_0 = 0$
27	$y = (3 - x)\, e^{3x-1}$	$x_0 = 3$
28	$y = \dfrac{1}{\sqrt{x^2 - 6x + 18}}$	$x_0 = 3$
29	$y = \ln \dfrac{2 - x^2}{\sqrt{1 + x^2}}$	$x_0 = 0$

30	$y = \dfrac{x+3}{(x+1)(x-2)}$	$x_0 = 0$

Задача №5

а) Разложить функцию $y = f(x)$, заданную на полупериоде $(0, l)$, в ряд Фурье по косинусам. Построить графики 2-ой, 3-ей частичных сумм. Записать равенство Парсеваля для полученного ряда.

б) Разложить функцию $y = f(x)$, заданную на полупериоде $(0, l)$, в ряд Фурье по синусам. Построить графики 2-ой, 3-ей частичных сумм.

в) Разложить функцию $y = f(x)$ в ряд Фурье, продолжая ее на полупериоде $(-l, 0)$ функцией, равной нулю. Построить графики второй, четвертой частичных сумм.

№			№		
1	$y = 1 - 3x$	$l = 1$	2	$y = 4x + 4$	$l = 2$
3	$y = 2x + 1$	$l = 3$	4	$y = 1 - x$	$l = 4$
5	$y = 4 - 4x$	$l = 2$	6	$y = 3x + 2$	$l = 3$
7	$y = 4 - 2x$	$l = 1$	8	$y = 1 - 2x$	$l = 4$
9	$y = 4x - 1$	$l = 4$	10	$y = 2 - 3x$	$l = 3$
11	$y = 4x - 3$	$l = 2$	12	$y = x + 1$	$l = 1$
13	$y = 2x - 1$	$l = 2$	14	$y = 1 - 4x$	$l = 1$
15	$y = x - 1$	$l = 4$	16	$y = 4x + 1$	$l = 2$
17	$y = 3x - 1$	$l = 1$	18	$y = 3x + 3$	$l = 2$
19	$y = 2 - 2x$	$l = 2$	20	$y = 3 - 3x$	$l = 1$
21	$y = 3x + 1$	$l = 2$	22	$y = 2 - 4x$	$l = 1$
23	$y = 2x + 2$	$l = 4$	24	$y = 4x + 3$	$l = 1$
25	$y = 2x - 2$	$l = 3$	26	$y = 3x - 2$	$l = 2$

27	$y = 4x + 2$	$l = 1$	28	$y = 4x - 2$	$l = 2$
29	$y = 3 - 4x$	$l = 1$	30	$y = 3x - 3$	$l = 2$

Задача №6

Представить интегралом Фурье функцию, заданную на интервале $(0, +\infty)$, продолжив ее на всю числовую ось четным и нечетным образом.

№		№	
1	$y = \left[\begin{array}{rr} 5 - 7x, & 0 < x \le \frac{5}{7} \\ 0, & x > \frac{5}{7} \end{array}\right.$	2	$y = \left[\begin{array}{rr} 2 - 5x, & 0 < x \le \frac{2}{5} \\ 0 & x > \frac{2}{5} \end{array}\right.$
3	$y = \left[\begin{array}{rr} 7 - 2x, & 0 < x \le \frac{7}{2} \\ 0, & x > \frac{7}{2} \end{array}\right.$	4	$y = \left[\begin{array}{rr} 3 - 5x, & 0 < x \le \frac{3}{5} \\ 0 & x > \frac{3}{5} \end{array}\right.$
5	$y = \left[\begin{array}{rr} 4 - 7x, & 0 < x \le \frac{4}{7} \\ 0, & x > \frac{4}{7} \end{array}\right.$	6	$y = \left[\begin{array}{rr} 5 - 6x, & 0 < x \le \frac{5}{6} \\ 0 & x > \frac{5}{6} \end{array}\right.$
7	$y = \left[\begin{array}{rr} 8 - 3x, & 0 < x \le \frac{8}{3} \\ 0, & x > \frac{8}{3} \end{array}\right.$	8	$y = \left[\begin{array}{rr} 6 - 5x, & 0 < x \le \frac{6}{5} \\ 0 & x > \frac{6}{5} \end{array}\right.$
9	$y = \left[\begin{array}{rr} 2 - 9x, & 0 < x \le \frac{2}{9} \\ 0, & x > \frac{2}{9} \end{array}\right.$	10	$y = \left[\begin{array}{rr} 7 - 4x, & 0 < x \le \frac{7}{4} \\ 0 & x > \frac{7}{4} \end{array}\right.$

11	$y = \left[\begin{array}{rr} 3-8x, & 0 < x \leq \dfrac{3}{8} \\ 0, & x > \dfrac{3}{8} \end{array} \right.$	12	$y = \left[\begin{array}{rr} 4-5x, & 0 < x \leq \dfrac{4}{5} \\ 0 & x > \dfrac{4}{5} \end{array} \right.$
13	$y = \left[\begin{array}{rr} 8-5x, & 0 < x \leq \dfrac{8}{5} \\ 0, & x > \dfrac{8}{5} \end{array} \right.$	14	$y = \left[\begin{array}{rr} 5-9x, & 0 < x \leq \dfrac{5}{9} \\ 0 & x > \dfrac{5}{9} \end{array} \right.$
15	$y = \left[\begin{array}{rr} 2-7x, & 0 < x \leq \dfrac{2}{7} \\ 0, & x > \dfrac{2}{7} \end{array} \right.$	16	$y = \left[\begin{array}{rr} 7-3x, & 0 < x \leq \dfrac{7}{3} \\ 0 & x > \dfrac{7}{3} \end{array} \right.$
17	$y = \left[\begin{array}{rr} 3-2x, & 0 \leq x \leq \dfrac{3}{2} \\ 0 & x > \dfrac{3}{2} \end{array} \right.$	18	$y = \left[\begin{array}{rr} 4-9x, & 0 < x \leq \dfrac{4}{9} \\ 0 & x > \dfrac{4}{9} \end{array} \right.$
19	$y = \left[\begin{array}{rr} 5-2x, & 0 < x \leq \dfrac{5}{2} \\ 0 & x > \dfrac{5}{2} \end{array} \right.$	20	$y = \left[\begin{array}{rr} 8-7x, & 0 < x \leq \dfrac{8}{7} \\ 0 & x > \dfrac{8}{7} \end{array} \right.$
21	$y = \left[\begin{array}{rr} 6-7x, & 0 \leq x \leq \dfrac{6}{7} \\ 0 & x > \dfrac{6}{7} \end{array} \right.$	22	$y = \left[\begin{array}{rr} 7-5x, & 0 < x \leq \dfrac{7}{5} \\ 0 & x > \dfrac{7}{5} \end{array} \right.$
23	$y = \left[\begin{array}{rr} 3-4x, & 0 < x \leq \dfrac{3}{4} \\ 0 & x > \dfrac{3}{4} \end{array} \right.$	24	$y = \left[\begin{array}{rr} 4-3x, & 0 < x \leq \dfrac{4}{3} \\ 0 & x > \dfrac{4}{3} \end{array} \right.$

25	$y = \left[\begin{array}{rr} 5-8x, & 0 \le x \le \dfrac{5}{8} \\ 0 & x > \dfrac{5}{8} \end{array} \right.$	26	$y = \left[\begin{array}{rr} 7-6x, & 0 < x \le \dfrac{7}{6} \\ 0 & x > \dfrac{7}{6} \end{array} \right.$
27	$y = \left[\begin{array}{rr} 3-7x, & 0 < x \le \dfrac{3}{7} \\ 0 & x > \dfrac{3}{7} \end{array} \right.$	28	$y = \left[\begin{array}{rr} 5-4x, & 0 < x \le \dfrac{5}{4} \\ 0 & x > \dfrac{5}{4} \end{array} \right.$
29	$y = \left[\begin{array}{rr} 7-8x, & 0 \le x \le \dfrac{7}{8} \\ 0 & x > \dfrac{7}{8} \end{array} \right.$	30	$y = \left[\begin{array}{rr} 5-3x, & 0 < x \le \dfrac{5}{3} \\ 0 & x > \dfrac{5}{3} \end{array} \right.$

Задача №7

Методом Фурье найти решение уравнения колебаний струны $\dfrac{\partial^2 U}{\partial t^2} = \dfrac{\partial^2 U}{\partial x^2}$ длины $l = 2$, закрепленной на концах: $u(0,t) = u(2,t) = 0$ и удовлетворяющей следующим начальным условиям:

$$U(x,0) = f(x), \quad \frac{\partial U(x,0)}{\partial t} = \varphi(x)$$

№	$f(x)$	$\varphi(x)$
1	$\begin{cases} x, & 0 \le x \le 1 \\ 2-x, & 1 \le x \le 2 \end{cases}$	0
2	0	$2x - x^2,\ 0 \le x \le 2$
3	$\begin{cases} -2x, & 0 \le x \le 1 \\ 2(x-2), & 1 \le x \le 2 \end{cases}$	0
4	0	$x^2 - 2x,\ 0 \le x \le 2$

5	$\begin{cases} \dfrac{x}{3}, & 0 \le x \le 1 \\ \dfrac{2-x}{3}, & 1 \le x \le 2 \end{cases}$	0
6	0	$4x - 2x^2,\ 0 \le x \le 2$
7	$\begin{cases} -x, & 0 \le x \le 1 \\ x-2, & 1 \le x \le 2 \end{cases}$	0
8	0	$\dfrac{x^2}{4} - \dfrac{x}{2},\ 0 \le x \le 2$
9	$\begin{cases} 2x, & 0 \le x \le 1 \\ 2(2-x), & 1 \le x \le 2 \end{cases}$	0
10	0	$8x - 4x^2,\ 0 \le x \le 2$
11	$\dfrac{x^2}{2} - x,\ 0 \le x \le 2$	0
12	0	$\begin{cases} -3x, & 0 \le x \le 1 \\ 3(x-2), & 1 \le x \le 2 \end{cases}$
13	$3x^2 - 6x,\ 0 \le x \le 2$	0
14	0	$\begin{cases} \dfrac{x}{5}, & 0 \le x \le 1 \\ \dfrac{2-x}{5}, & 1 \le x \le 2 \end{cases}$
15	$4x - 2x^2,\ 0 \le x \le 2$	0
16	0	$\begin{cases} -\dfrac{2x}{3}, & 0 \le x \le 1 \\ \dfrac{2(x-2)}{3}, & 1 \le x \le 2 \end{cases}$
17	$-\dfrac{x^2}{2} + x,\ 0 \le x \le 2$	0

18	0	$\begin{cases} 5x, & 0 \le x \le 1 \\ 5(2-x), & 1 \le x \le 2 \end{cases}$
19	$\frac{x}{2} - \frac{x^2}{4},\ 0 \le x \le 2$	0
20	0	$\begin{cases} -\frac{x}{2}, & 0 \le x \le 1 \\ \frac{(x-2)}{2}, & 1 \le x \le 2 \end{cases}$
21	$\begin{cases} \frac{x}{3}, & 0 \le x \le 1 \\ \frac{2-x}{3}, & 1 \le x \le 2 \end{cases}$	0
22	0	$4x - 2x^2,\ 0 \le x \le 2$
23	$\begin{cases} -x, & 0 \le x \le 1 \\ x-2, & 1 \le x \le 2 \end{cases}$	0
24	0	$\frac{x^2}{4} - \frac{x}{2},\ 0 \le x \le 2$
25	$\begin{cases} 2x, & 0 \le x \le 1 \\ 2(2-x), & 1 \le x \le 2 \end{cases}$	0
26	0	$x^2 - 2x,\ 0 \le x \le 2$
27	$\begin{cases} x, & 0 \le x \le 1 \\ 2-x, & 1 \le x \le 2 \end{cases}$	0
28	0	$2x - x^2,\ 0 \le x \le 2$
29	$-\frac{x^2}{2} + x,\ 0 \le x \le 2$	0

30	0	$\begin{cases} 5x, & 0 \le x \le 1 \\ 5(2-x), & 1 \le x \le 2 \end{cases}$

Часть II. Теория рядов

§1 Числовые ряды

1.1 Числовой ряд, сходимость числового ряда

Одним из важнейших инструментов математического анализа, удобным и полезным для решения многих задач, являются "бесконечные суммы" или ряды.

Пусть задана числовая последовательность $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$. Составленное из членов этой последовательности выражение

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

называется числовым рядом, а члены последовательности называются членами этого ряда.

Рассмотрим суммы

$$\begin{aligned} &S_1 = a_1, \\ &S_2 = a_1 + a_2, \\ &\ldots \\ &S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n, \end{aligned}$$

которые называются частичными суммами ряда. Частичные суммы образуют новую числовую последовательность S_1, $S_2, \ldots, S_n, \ldots$

Числовой ряд называется сходящимся, если существует конечный предел последовательности его частичных сумм, т.е.

$$\exists \lim_{n\to\infty} S_n = S.$$

Число S называется суммой ряда. Допускается запись $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = S$, которая придает символу бесконечной суммы числовой смысл.

Числовой ряд называется расходящимся, если предел последовательности частичных сумм равен бесконечности или не существует.

Рассмотрим примеры.

Пример 1.

$$\frac{1}{2\cdot 5} + \frac{1}{5\cdot 8} + \ldots + \frac{1}{(3n-1)(3n+2)} + \ldots =$$
$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(3n-1)(3n+2)}.$$

Представляя общий член ряда в виде разности

$$\frac{1}{(3n-1)(3n+2)} = \frac{1}{3(3n-1)} - \frac{1}{3(3n+2)},$$

вычислим частичную сумму с номером n

$$S_n = \Big(\frac{1}{3\cdot 2} - \frac{1}{3\cdot 5}\Big) + \Big(\frac{1}{3\cdot 5} - \frac{1}{3\cdot 8}\Big) + \ldots +$$
$$+ \Big(\frac{1}{3(3n-1)} - \frac{1}{3(3n+2)}\Big) = \frac{1}{3\cdot 2} - \frac{1}{3(3n+2)}.$$

Легко понять, что существует конечный $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$, равный $\frac{1}{6}$. Значит, данный ряд сходится и его сумма равна $\frac{1}{6}$.

Пример 2.

$$1 + 3 + 5 + \ldots + (2n-1) + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} (2n-1)$$

Вычислим частичную сумму этого ряда.

$$S_n = 1 + 3 + 5 + \ldots + (2n-1) = \frac{1-(2n-1)}{2}\, n = n^2.$$

В этом примере $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \infty$, следовательно, данный ряд расходится.

Пример 3.

$$1 - 1 + 1 + \ldots + (-1)^{n+1} + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1}.$$

У этого ряда все частичные суммы с нечетными номерами равны 1, а частичные суммы с четными номерами равны 0. Значит, предел последовательности частичных сумм не существует, и ряд расходится.

Пример 4. Рассмотрим более сложный пример
$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \operatorname{arctg} \dfrac{1}{n^2+n+1}$.

Для вычисления частичных сумм воспользуемся формулой

$$\operatorname{arctg} a + \operatorname{arctg} b = \operatorname{arctg} \frac{a+b}{1-ab}$$

справедливой в случае, когда $a \in (0,1)$ и $b \in (0,1)$.

$$S_1 = \operatorname{arctg} \frac{1}{3},$$

$$S_2 = \operatorname{arctg} \frac{\dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{7}}{1 - \dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{1}{7}} = \operatorname{arctg} \frac{10}{20} = \operatorname{arctg} \frac{2}{4}.$$

Предположим, что $S_n = \operatorname{arctg} \dfrac{n}{n+2}$, и докажем справедливость этой формулы, пользуясь методом математической индукции. Пусть $S_{n-1} = \operatorname{arctg} \dfrac{n-1}{n+1}$, тогда

$$S_n = S_{n-1} + a_n = \operatorname{arctg} \frac{n-1}{n+1} + \operatorname{arctg} \frac{1}{n^2+n+1} =$$

$$= \operatorname{arctg} \frac{\dfrac{n-1}{n+1} + \dfrac{1}{n^2+n+1}}{1 - \dfrac{n-1}{n+1}\cdot\dfrac{1}{n^2+n+1}} =$$

$$= \operatorname{arctg} \frac{(n-1)(n^2+n+1)+(n+1)}{(n+1)(n^2+n+1)-(n-1)} =$$
$$= \operatorname{arctg} \frac{(n^3-1)+(n+1)}{n^3+2n^2+n+2} =$$
$$= \operatorname{arctg} \frac{n^3+n}{n^2(n+2)+(n+2)} = \operatorname{arctg} \frac{n(n^2+1)}{(n+2)(n^2+1)} =$$
$$= \operatorname{arctg} \frac{n}{n+2},$$

что и требовалось доказать.

Итак, $S_n = \operatorname{arctg} \dfrac{n}{n+2}$, $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \lim\limits_{n\to\infty} \left(\operatorname{arctg} \dfrac{n}{n+2} \right) = \operatorname{arctg} 1 = \dfrac{\pi}{4}$. Ряд сходится, его сумма равна $\dfrac{\pi}{4}$.

1.2 Геометрическая прогрессия

Геометрической прогрессией называется числовая последовательность

$$b,\ bq,\ bq^2, \ldots, bq^{n-1}, \ldots, (b \neq 0,\ q \neq 0).$$

Суммируя члены геометрической прогрессии, получим ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} bq^{n-1}$. Запишем частичную сумму этого ряда $S_{n+1} = b + bq + bq^2 + \ldots + bq^n$ двумя способами

$$S_{n+1} = b + q(b + bq + bq^2 + \ldots + bq^{n-1}) = b + qS_n,$$
$$S_{n+1} = (b + qb + bq^2 + \ldots + bq^{n-1}) + bq^n = S_n + bq^n.$$

Приравнивая эти выражения $b + qS_n = S_n + bq^n$, получим $S_n(1-q) = b(1-q^n)$. Предполагая, что $q \neq 1$, выразим S_n

$$S_n = \frac{b(1-q^n)}{1-q}.$$

В случае, когда $q = 1$, очевидно, что $S_n = nq$ и $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \infty$, т.е. ряд расходится. Если $|q| < 1$, то $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = 0$ и $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \dfrac{b}{1-q}$, т.е.

ряд сходится, и его сумма $S = \dfrac{b}{1-q}$. Если $|q| > 1$, то $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = \infty$ и $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \infty$, т.е. ряд расходится. Наконец, если $q = -1$, то частичные суммы попеременно принимают значения q и 0. Предел последовательности частичных сумм не существует. Ряд расходится.

Итак, ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} bq^{n-1}$ сходится при условии $|q| < 1$, и его сумма равна $\dfrac{b}{1-q}$. Если $|q| \geq 1$, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} bq^{n-1}$ расходится.

1.3 Гармонический ряд

Ряд

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

называется гармоническим. Каждый член гармонического ряда, начиная со второго, является гармоническим средним соседних с ним членов

$$\frac{1}{a_n} = \frac{1}{2}\Big(\frac{1}{a_{n-1}} + \frac{1}{a_{n+1}}\Big).$$

Покажем, что гармонический ряд является расходящимся. Для этого воспользуемся тем, что последовательность $\left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n$ является монотонно возрастающей и $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n = e$ (2-ой замечательный предел). Все члены этой последовательности меньше числа e.

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < e, \quad n = 1,\, 2,\, 3, \ldots$$

Прологарифмируем данное неравенство по основанию e

$$\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < \ln e \;\Rightarrow\; n \ln\left(\frac{n+1}{n}\right) < 1 \;\Rightarrow$$
$$\Rightarrow\; \frac{1}{n} > \ln(n+1) - \ln n.$$

Полученное неравенство справедливо для всех натуральных значений n.

$$
\begin{aligned}
&1 > \ln 2 - \ln 1,\\
&\frac{1}{2} > \ln 3 - \ln 2,\\
&\frac{1}{3} > \ln 4 - \ln 3,\\
&\ldots\\
&\frac{1}{n} > \ln(n+1) - \ln n
\end{aligned}
$$

Складывая эти неравенства, получим $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n} > \ln(n+1)$.

Это означает, что с возрастанием n частичные суммы гармонического ряда неограниченно возрастают, а, следовательно, гармонический ряд расходится.

§2 Свойства сходящихся рядов

2.1 Необходимое условие сходимости числового ряда

Докажем следующее утверждение: если числовой ряд сходится, то его общий член стремится к нулю, т.е. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

Действительно, для сходящегося ряда $\exists \lim\limits_{n\to\infty} S_n = S$ и $\exists \lim\limits_{n\to\infty} S_{n-1} = S$. А т.к. $a_n = S_n - S_{n-1}$, то $\exists \lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty}(S_n - S_{n-1}) = S - S = 0$.

Мы получили необходимое условие сходимости числового ряда. При нарушении этого условия ряд заведомо расходится. При выполнении этого условия ряд может быть как сходящимся, так и расходящимся.

Вернемся к рассмотренным примерам. Для рядов $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(3n-1)(3n+2)}$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ необходимое условие сходимости выполнено, но первый из них является сходящимся, а второй - расходящимся.

Необходимое условие удобно применять для доказательства расходимости рядов.

Например, ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{2n+1}{3n+2}$ расходится, т.к. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2n+1}{3n+2} = \dfrac{2}{3} \neq 0.$

Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\dfrac{3n+1}{3n+2}\right)^n$ также является расходящимся, т.к.

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{3n+1}{3n+2}\right)^n = \lim_{n\to\infty} \left(\left(1 - \frac{1}{3n+2}\right)^{-(3n+2)}\right)^{-\frac{n}{3n+2}} = \\ = e^{-\frac{1}{3}} = \frac{1}{\sqrt[3]{e}} \neq 0,$$

т.е. необходимое условие не выполняется.

2.2 Остаток ряда

Если отбросить первые n членов ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$, то получится ряд

$$a_{n+1} + a_{n+2} + a_{n+3} + \ldots + a_{n+m} + \ldots = \sum_{k=n+m}^{\infty} a_k,$$

который называется остатком данного ряда с номером n. Данный ряд сходится тогда и только тогда, когда сходится любой из его остатков. Действительно, отбрасывание некоторого числа первых членов ряда изменит значения членов последовательности частичных сумм на некоторую величину, равную сумме отброшенных членов, но не повлияет на сходимость.

Если S и S_n - соответственно сумма и частичная сумма с номером n сходящегося ряда, а r_n – сумма его остатка, то $r_n = S - S_n$. Следовательно, $\lim\limits_{n\to\infty} r_n = \lim\limits_{n\to\infty}(S - S_n) = S - S = 0.$

Другими словами, если ряд сходится, сумма его остатка стремится к нулю с возрастанием номера остатка.

2.3 Критерий Коши сходимости рядов

Согласно определению числовой ряд сходится, если сходится последовательность его частичных сумм. Для числовой последовательности критерий сходимости (критерий Коши) формулируется следующим образом для того, чтобы числовая последовательность S_n, $n = 1, 2, 3, \ldots$, имела конечный предел, необходимо и достаточно, чтобы для любого ε существовал такой номер N, что для всех $n \geq N$ и для всех натуральных чисел k выполнялось неравенство $|S_{n+k} - S_n| < \varepsilon$.

Формулируя эту теорему для последовательности частичных сумм, получим критерий сходимости числовых рядов: для того, чтобы сходился числовой ряд $\sum\limits_{n}^{\infty} a_n$, необходимо и достаточно, чтобы для любого ε существовал такой номер N, что для всех $n \geq N$ и для всех натуральных чисел k выполнялось неравенство

$$|a_{n+1} + a_{n+2} + a_{n+3} + \ldots + a_{n+k}| < \varepsilon.$$

В качестве примера применения критерия Коши, еще раз докажем расходимость гармонического ряда. Для этого оценим разность между частичными суммами гармонического ряда $|S_{n+k} - S_n|$, полагая $k = n$

$$|S_{2n} - S_n| = \underbrace{\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{2n}}_{n \text{ слагаемых}} > n \cdot \frac{1}{2n} = \frac{1}{2}.$$

Следовательно, какой бы ни был номер n, можно выбрать число $k = n$ так, что $|S_{n+k} - S_n| > \dfrac{1}{2}$. Итак, если выбрать $\varepsilon = \dfrac{1}{2}$ и для любого номера n выбрать число $k = n$, то $|S_{n+k} - S_n| > \varepsilon$ и, согласно критерию Коши, гармонический ряд расходится.

2.4 Линейные действия с рядами

Сходящиеся ряды обладают следующими простыми свойствами

1) если члены сходящегося ряда умножить на одно и то же число, то его сходимость не нарушится (сумма умножится на то число, на которое были умножены члены ряда),

2) если ряды $\sum\limits_{n}^{\infty} a_n$ и $\sum\limits_{n}^{\infty} b_n$ сходятся и их суммы равны A и B соответственно, то ряд $\sum\limits_{n}^{\infty} (a_n + b_n)$ также сходится и его сумма равна $A + B$.

§3 Числовые ряды с положительными членами

Положительными называются ряды, все члены которых неотрицательны. Последовательности частичных сумм таких рядов монотонно возрастают, т.к. $S_{n+1} = S_n + a_{n+1} \geq S_n$.

Как известно, монотонная последовательность имеет конечный предел тогда и только тогда, когда она ограничена. Следовательно, положительный ряд сходится тогда и только тогда, когда его частичные суммы ограничены. Для непосредственного применения этого простого утверждения требуется делать оценку частичных сумм ряда, а это оказывается сложно в большинстве случаев. Как правило, судить о сходимости или расходимости ряда удается, применяя некоторые достаточные признаки, например, сравнивая данный ряд с другим, заведомо сходящимся или расходящимся.

3.1 Признаки сравнения

<u>Первый признак сравнения.</u> Пусть даны два положительных ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \qquad (1) \qquad\qquad \sum_{n=1}^{\infty} b_n \qquad (2)$$

Если для всех номеров n (или для всех номеров n, бóльших некоторого номера N) выполнено неравенство $a_n \leq b_n$, то из сходимости ряда (2) следует сходимость ряда (1), а из расходимости ряда (1) следует расходимость ряда (2).

Доказательство. Будем предполагать, что неравенство $a_n \leq b_n$ выполнено для всех номеров n. В противном случае можно отбросить конечное число членов ряда, для которых неравенство не выполнено, что не повлияет на сходимость ряда. Тогда

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_n \leq b_1 + b_2 + \ldots + b_n.$$

Если ряд (2) сходится, то его частичные суммы ограничены, т.е. $b_1 + b_2 + \ldots + b_n < S$, где S – некоторая константа. Но тогда ограничены и частичные суммы ряда (1), и ряд (1) сходится.

Если же ряд (1) расходится, то, предполагая, что ряд (2) сходится, получим противоречие. Теорема доказана.

Пример 1. Исследовать на сходимость ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{2^n + \sqrt{n}}$.

Рассмотрим ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{2^n}$, который сходится, как сумма геометрической прогрессии со знаменателем $q = \dfrac{1}{2}$. Для всех номеров n верно, что

$$\frac{1}{2^n + \sqrt{n}} < \frac{1}{2^n}.$$

Согласно первому признаку сравнения данный ряд также сходится.

Пример 2. Исследовать на сходимость ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{\sqrt{n}}$.

Рассмотрим для сравнения гармонический ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n}$, который, как уже было доказано, расходится. Для всех $n \geq 2$ верно, что $\dfrac{1}{\sqrt{n}} > \dfrac{1}{n}$, и, следовательно, данный ряд также расходится.

Второй признак сравнения (предельный). Пусть даны два положительных ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \qquad (1) \qquad\qquad \sum_{n=1}^{\infty} b_n \qquad (2)$$

Если существует конечный, отличный от нуля $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{b_n}$, то ряды (1) и (2) оба сходятся или оба расходятся.

Доказательство. Предположим, что ряд (2) сходится. Обозначим $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{b_n}=A$, $A>0$. По определению предела для любого положительного ε и достаточно больших номеров n будет выполнено неравенство

$$\frac{a_n}{b_n}<A+\varepsilon \quad \text{или} \quad a_n<(A+\varepsilon)\,b_n$$

Т.к. ряд (2) сходится, то согласно свойству сходящихся рядов сходится и ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(A+\varepsilon)\,b_n$, а, значит, по первому признаку сравнения сходится и ряд (1).

Рассматривая $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{b_n}$, который также существует, конечен и отличен от нуля, придем к выводу, что из сходимости ряда (1) следует сходимость ряда (2). Итак, если один из рядов сходится, то другой также сходится.

Далее, предполагая, что один из рядов расходится, а другой сходится, получим противоречие с уже доказанным утверждением. Теорема доказана.

Пример 1. Докажем еще раз расходимость гармонического ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}$, сравнивая его с рядом $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right)$, общий член которого $\ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right)=\ln\dfrac{n+1}{n}=\ln(n+1)-\ln n$, а частичная сумма $S_n=(\ln 2-\ln 1)+(\ln 3-\ln 2)+\ldots+\big(\ln(n+1)-\ln n\big)=\ln(n+1)\to\infty$ при возрастании n. Следовательно, этот ряд расходится.

Вычислим

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right)}{\dfrac{1}{n}}=\lim_{n\to\infty}\left(n\,\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\right)\lim_{n\to\infty}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=$$
$$=\ln e=1.$$

Согласно предельному признаку сравнения гармонический ряд расходится.

Пример 2. Пользуясь определением сходимости, т.е. рассматривая предел частичных сумм, мы уже доказали, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(3n-1)(3n+2)}$ сходится. Значит, сходится ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$, т.к. предел отношения общих членов этих рядов конечен и отличен от нуля

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n^2}}{\frac{1}{(3n-1)(3n+2)}} = \lim_{n\to\infty} \frac{(3n-1)(3n+2)}{n^2} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left[\left(3 - \frac{1}{n}\right)\left(3 + \frac{2}{n}\right)\right] = 9.$$

3.2 Признак Даламбера

Признак Даламбера. Пусть дан положительный ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ и существует

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = D.$$

Если $D < 1$, то ряд сходится, если $D > 1$, то ряд расходится.

Доказательство. Пусть $D < 1$. Возьмем $\varepsilon = \frac{1-D}{2} > 0$. Согласно определению предела, начиная с некоторого номера N, будет выполнено неравенство

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} < D + \varepsilon = D + \frac{1-D}{2} = \frac{1+D}{2} = q < 1.$$

или

$$\begin{aligned} &a_{N+1} < a_N \cdot q, \\ &a_{N+2} < a_{N+1} \cdot q < a_N \cdot q^2, \\ &\ldots \\ &a_{N+k} < a_N \cdot q^k \end{aligned}$$

т.е. члены ряда оказываются меньше, чем члены бесконечно убывающей геометрической прогрессии. Значит, согласно первому признаку сравнения, ряд сходится.

Если $D > 1$ или $D = \infty$, то члены ряда оказываются больше, чем члены бесконечно возрастающей геометрической прогрессии, и, значит, ряд расходится.

Пример 1. Рассмотрим ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n}{3^n}$.

Вычислим предел отношения последующего члена ряда к предыдущему

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{n+1}{3^{n+1}}}{\frac{n}{3^n}} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n+1}{n} \cdot \frac{3^n}{3^{n+1}} \right) = \frac{1}{3} \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n} \right) = \frac{1}{3} < 1,$$

т.е. ряд сходится.

Пример 2. Рассмотрим ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{n!}$.

Вычислим

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{n^n} \right) = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{(n+1)^n}{n!} \cdot \frac{n!}{n^n} \right) =$$
$$= \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n+1}{n} \right)^n = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n = e > 1$$

и, согласно признаку Даламбера, данный ряд расходится.

3.3 Радикальный признак Коши

Радикальный признак Коши. Пусть дан положительный ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ и существует $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = K$. Если $K < 1$, то ряд сходится, если $K > 1$, то ряд расходится.

Доказательство. Пусть $K < 1$. Возьмем $\varepsilon = \frac{1-K}{2} > 0$. Согласно определению предела, начиная с некоторого номера N будет выполнено неравенство

$$\sqrt[n]{a_n} < K + \varepsilon = K + \frac{1-K}{2} = \frac{1+K}{2} = q < 1$$

или $a_n < q^n$, т.е. члены ряда оказываются меньше, чем члены бесконечно убывающей геометрической прогрессии. Значит, ряд сходится.

Если $K > 1$ или $K = \infty$, то члены ряда оказываются больше, чем члены бесконечно возрастающей геометрической прогрессии, и, значит, ряд расходится.

Пример 1. Рассмотрим ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+1}{3n}\right)^n$.

Вычислим

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n+1}{3n}\right) = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{3n}\right) = \frac{1}{3} < 1,$$

значит, ряд сходится.

Пример 2. Рассмотрим ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}$.

Применим радикальный признак Коши

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \left[\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right] = \frac{e}{2} > 1,$$

значит, ряд расходится.

Замечание. Признаки Даламбера и Коши не дают ответа на вопрос о сходимости ряда в случае, когда соответствующие пределы равны 1. Например, вычислим эти пределы для гармонического ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$, расходимость которого была доказана

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = 1,$$

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} \left(n^{-\frac{1}{n}}\right) = \lim_{n\to\infty} e^{-\frac{\ln n}{n}} = e^{-\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\ln n}{n}} =$$
$$= e^0 = 1.$$

При вычислении последнего предела было использовано правило Лопиталя для раскрытия неопределенности $\dfrac{\infty}{\infty}$

$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\ln x}{x} = \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\frac{1}{x}}{1} = \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x} = 0$. Такой же результат получим, рассматривая сходящийся ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^2}$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{(n+1)^2} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^2 = 1,$$

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{1}{n^2}} = \lim_{n\to\infty}\left(n^{-\frac{2}{n}}\right) = \lim_{n\to\infty} e^{-\frac{2\ln n}{n}} =$$
$$= e^{-2\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\ln n}{n}} = e^0 = 1.$$

3.4 Интегральный признак Коши

Интегральный признак Коши. Пусть дан положительный ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, общий член которого совпадает со значением некоторой функции $f(x)$ при $x = n$ $a_n = f(n)$. Предположим, что функция $f(x)$ определена, положительна, непрерывна и монотонно убывает при $x \geq 1$. Тогда ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится, если сходится $\int\limits_1^{+\infty} f(x)dx$, и расходится, если этот интеграл расходится.

Доказательство. Для иллюстрации рассмотрим график функции $y = f(x)$, удовлетворяющей условиям теоремы, и построим ступенчатые фигуры, одна из которых вписана в криволинейную трапецию, ограниченную графиком функции $y = f(x)$, осью Ox и прямыми $x = 1$, $x = n$, а другая описана около этой трапеции.

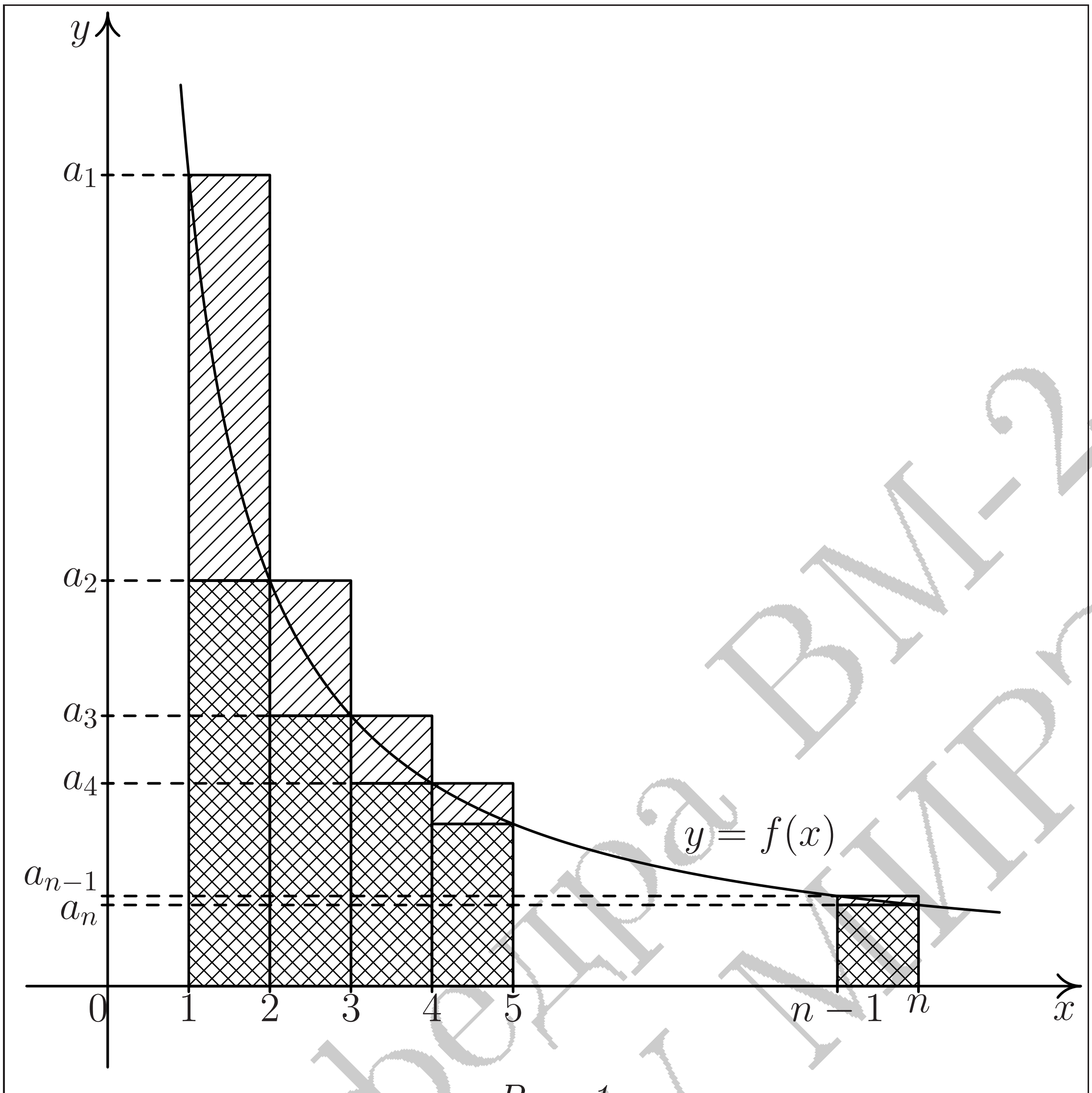

Рис. 1

Площадь вписанной ступенчатой фигуры равна $a_2+a_3+\ldots+a_n$, площадь описанной фигуры равна $a_1+a_2+\ldots+a_{n-1}$. Площадь самой криволинейной трапеции равна $\int\limits_1^n f(x)dx$ и заключена между площадями вписанной и описанной фигур

$$a_2 + a_3 + \ldots + a_n < \int\limits_1^n f(x)dx < a_1 + a_2 + \ldots + a_{n-1}.$$

Пусть интеграл $\int\limits_1^{+\infty} f(x)dx$ сходится, т.е. имеет конечное значение

$\int\limits_1^{+\infty} f(x)dx = J$. Тогда частичные суммы ряда S_n ограничены

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n < a_1 + \int\limits_1^n f(x)dx < a_1 + J.$$

Следовательно, ряд сходится.

Если $\int\limits_1^{+\infty} f(x)dx$ расходится, то

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n > \int\limits_1^n f(x)dx + a_n > \int\limits_1^n f(x)dx \to \infty,$$
$$n \to \infty,$$

следовательно ряд расходится.

Пример 1. Рассмотрим ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$, который называют обобщенным гармоническим рядом или рядом Дирихле.

Интеграл $\int\limits_1^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha}$ сходится при условии $\alpha > 1$ и расходится при условии $\alpha \leq 1$, следовательно, обобщенный гармонический ряд сходится, если $\alpha > 1$, и расходится, если $\alpha \leq 1$.

Пример 2. Рассмотрим ряд $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln n}$.

Соответствующий несобственный интеграл

$$\int\limits_2^{+\infty} \frac{1}{x \ln x} = \int\limits_2^{+\infty} \frac{d(\ln x)}{\ln x} = \ln(\ln x)|_2^{+\infty} = +\infty,$$

а, значит, данный ряд расходится.

Замечание. Мы рассмотрели основные признаки сходимости положительных рядов. Есть другие, более "тонкие"признаки, дающие ответ на вопрос о сходимости рядов в тех случаях, где рассмотренные признаки "не работают".

§4 Знакопеременные числовые ряды

Числовой ряд называется знакопеременным, если среди его членов есть как положительные, так и отрицательные числа. Если отрицательных членов конечное число, то, отбросив их, получим положительный ряд. Если положительных членов конечное число, то, отбросив их, получим отрицательный ряд, который можно исследовать с помощью теорем о сходимости положительных рядов, изменив знаки всех членов ряда. Существенно новым является тот случай, когда среди членов ряда бесконечное число положительных и бесконечное число отрицательных чисел.

4.1 Ряд Лейбница

Рассмотрим случай, когда знаки членов ряда чередуются, например, члены с нечетными номерами положительны, а члены с четными номерами отрицательны. Такие ряды удобно записывать в виде

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}a_n \qquad \text{или} \qquad \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}a_n, \qquad \text{где } a_n>0.$$

Теорема Лейбница (признак сходимости знакочередующегося ряда). Если члены знакочередующегося ряда монотонно убывают по модулю

$$a_{n+1}<a_n, \quad n=1,2,3,\ldots$$

и стремятся к нулю

$$\lim_{n\to\infty}a_n=0$$

то ряд сходится.

Доказательство. Для определенности возьмем ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}a_n$, $a_n>0$. Рассмотрим последовательность частичных сумм с четными номерами

$$S_{2n}=(a_1-a_2)+(a_3-a_4)+\ldots+(a_{2n-1}-a_{2n}).$$

Члены ряда сгруппированы так, что все слагаемые этой суммы – положительные числа. Значит, частичные суммы с четными номерами возрастают с ростом n. С другой стороны

$$S_{2n}=a_1-(a_2-a_3)-(a_4-a_5)-\ldots-(a_{2n-2}-a_{2n-1})-a_{2n},$$

т.е. частичные суммы с четными номерами ограничены первым членом ряда $S_{2n} < a_1$. Следовательно, существует конечный предел

$$\lim_{n\to\infty} S_{2n} = S.$$

Для частичных сумм с нечетными номерами справедливо равенство

$$S_{2n+1} = S_{2n} + a_{2n+1},$$

из которого следует, что

$$\lim_{n\to\infty} S_{2n+1} = \lim_{n\to\infty}(S_{2n} + a_{2n+1}) = \lim_{n\to\infty} S_{2n} + \lim_{n\to\infty} a_{2n+1} = S.$$

Итак, частичные суммы с четными и нечетными номерами имеют один и тот же предел, а, значит, ряд сходится, и его сумма равна S.

Замечание 1. Знакочередующийся ряд, удовлетворяющий условиям теоремы Лейбница, называется рядом Лейбница.

Замечание 2. Частичные суммы с четными номерами приближаются к сумме ряда S, возрастая, а частичные суммы с нечетными номерами – убывая, т.е. справедливо неравенство

$$S_{2n} < S < S_{2n-1}.$$

В частности,

$$0 < S < a_1.$$

Если первый член ряда Лейбница $-a_1$ отрицателен, то $-a_1 < S < 0$.

В любом случае сумма ряда имеет знак его первого члена и меньше его по модулю. Остаток ряда Лейбница также является рядом Лейбница. Следовательно, сумма остатка имеет знак своего первого члена и меньше его по модулю. Так для ряда Лейбница легко оценивается разность между суммой и частичной суммой.

Пример 1. Рассмотрим ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^{n+1}}{n}$.

Легко проверить, что условия теоремы Лейбница выполнены, ряд сходится.

Пример 2. Рассмотрим ряд $\sum\limits_{n=2}^{\infty}(-1)^n\dfrac{\ln n}{n}$, $a_n=\dfrac{\ln n}{n}$.

Для проверки выполнения условий теоремы Лейбница введем функцию $f(x)=\dfrac{\ln x}{x}$ и докажем, что она монотонно убывает, начиная с некоторого значения x, и стремится к нулю при $x\to\infty$. Вычислим

$$f'(x)=\frac{1-\ln x}{x^2}<0 \quad \text{для} \quad x>e.$$

Это означает, что, начиная с номера $n=3$, верно неравенство $a_{n+1}<a_n$. Как уже было показано, $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\ln n}{n}=0$. Следовательно, условия теоремы Лейбница выполнены, и ряд сходится.

Замечание. Составим ряды из модулей членов рассмотренных рядов

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}, \quad \sum_{n=2}^{\infty}\frac{\ln n}{n}.$$

Оба эти ряда расходятся. Первый из них является гармоническим, а члены второго, начиная с $n=3$, больше, чем члены гармонического ряда.

4.2 Абсолютная и условная сходимость

Пусть дан произвольный знакопеременный ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$, а ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|a_n|$ составлен из модулей его членов.

Теорема. Если сходится ряд из модулей членов данного ряда, то сходится и сам знакопеременный ряд.

Доказательство. Пусть сходится ряд из модулей. Тогда согласно критерию Коши для любого $\varepsilon>0$ найдется номер N такой, что для любого номера $n>N$ и любого натурального k будет верно неравенство

$$|a_{n+1}|+|a_{n+2}|+\ldots+|a_{n+k}|<\varepsilon.$$

Для знакопеременного ряда получим следующую оценку

$$|a_{n+1}+a_{n+2}+\ldots+a_{n+k}|\le|a_{n+1}|+|a_{n+2}|+\ldots+|a_{n+k}|<\varepsilon,$$

что означает, что условие сходимости для него выполняется, т.е. сам знакопеременный ряд сходится.

Если сходится ряд, составленный из модулей членов данного ряда, то сам знакопеременный ряд называется абсолютно сходящимся.

Если знакопеременный ряд сходится, а ряд, составленный из модулей его членов, расходится, то такой ряд называется условно сходящимся.

Ряды, рассмотренные в примерах предыдущего пункта, являются условно сходящимися.

При установлении абсолютной сходимости можно пользоваться всеми признаками сходимости положительных рядов. Если сходимость ряда из модулей установлена, то исследование ряда на этом заканчивается ряд сходится абсолютно. Если установлена расходимость ряда из модулей с помощью признаков Даламбера или Коши, то исследование также заканчивается, т.к. в этом случае знакопеременный ряд расходится в силу невыполнения необходимого условия сходимости (общий член ряда стремится к ∞ с возрастанием n). Если расходимость ряда установлена другими способами, то исследование надо продолжить, например, с помощью теоремы Лейбница: ряд может сходиться условно.

Пример 1. Рассмотрим ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\dfrac{2^{n^2}}{n!}$.

Применим признак Даламбера к ряду из модулей

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{2^{(n+1)^2}}{(n+1)!}\cdot\frac{n!}{2^{n^2}}=\lim_{n\to\infty}\frac{2^{n^2+2n+1}}{2^{n^2}}\cdot\frac{n!}{(n+1)!}=$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{2^{2n+1}}{n+1}=\infty.$$

Предел вычислен с помощью правила Лопиталя

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{2^{2x+1}}{x+1}=\frac{\infty}{\infty}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2^{2x+1}\ln 2\cdot 2}{1}=+\infty.$$

Ряд из модулей расходится, причем его расходимость установлена с помощью признака Даламбера. Значит, и сам ряд расходится.

Пример 2. Рассмотрим ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\Big(\dfrac{3n+1}{5n+3}\Big)^n$.

Применим радикальный признак Коши к ряду из модулей

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{3n+1}{5n+3}\right)=\frac{3}{5}<1.$$

Значит, данный ряд сходится абсолютно.

Пример 3. Рассмотрим ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{\sqrt[3]{n}}$.

Ряд из модулей является расходящимся как обобщенный гармонический ряд с показателем $\alpha=\dfrac{1}{3}$. Однако, для данного ряда выполнены условия теоремы Лейбница, т.е. ряд сходится условно.

4.3 Свойства абсолютно и условно сходящихся рядов

Без доказательства отметим следующие свойства абсолютно и условно сходящихся рядов.

Если ряд сходится абсолютно, то ряд, полученный произвольной перестановкой его членов, также сходится и имеет ту же сумму. Другими словами, абсолютно сходящийся ряд обладает переместительным свойством так же, как и конечная сумма.

Если ряд сходится условно, то надлежащей перестановкой его членов можно изменить сумму ряда на любое заданное число, а также сделать ряд расходящимся.

Рассмотрим пример. Ряд

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n}+\ldots$$

является условно сходящимся.

Рассмотрим его частичные суммы с четными номерами

$$S_{2n}=\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\ldots+\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n}\right).$$

Теперь переставим члены ряда так, что после одного положительного члена будут следовать 2 отрицательных

$$1-\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{3}-\frac{1}{6}-\frac{1}{8}+\ldots+\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{4n-2}-\frac{1}{4n}+\ldots$$

Рассмотрим частичные суммы этого ряда с номерами, кратными 3

$$\sigma_{3n} = \Big(1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4}\Big) + \Big(\frac{1}{3} - \frac{1}{6} - \frac{1}{8}\Big) + \ldots +$$
$$+\Big(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{4n-2} - \frac{1}{4n}\Big) =$$
$$= \Big(\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\Big) + \Big(\frac{1}{6} - \frac{1}{8}\Big) + \ldots + \Big(\frac{1}{4n-2} - \frac{1}{4n}\Big) =$$
$$= \frac{1}{2}\Big(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n}\Big) = \frac{1}{2}S_{2n}.$$

Причем

$$\sigma_{3n+1} = \sigma_{3n} + \frac{1}{2n+1},$$
$$\sigma_{3n+2} = \sigma_{3n} + \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{4n+2}.$$

Ясно, что последовательность частичных сумм нового ряда сходится. Однако, в результате перестановки членов ряда получен ряд, сумма которого в 2 раза меньше суммы исходного ряда.

§5 Функциональные ряды

5.1 Функциональный ряд, его область сходимости

Пусть дана последовательность функций

$$u_1(x),\ u_2(x), \ldots, u_n(x), \ldots,$$

определенных на некотором множестве X. Выражение вида

$$u_1(x) + u_2(x) + \ldots + u_n(x) + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$$

называется функциональным рядом, а множество X – областью определения этого ряда.

При подстановке произвольного значения x из множества X функциональный ряд становится числовым, причем при одних значениях x числовой ряд может быть сходящимся, а при других

– расходящимся. Множество значений переменной x, при которых функциональный ряд сходится, называется областью сходимости функционального ряда. Например, ряды

$$\sum_{n=1}^{\infty} x^n, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x}$$

определены при любых значениях x. Областью сходимости первого из них является интервал $(-1, 1)$, а областью сходимости второго – промежуток $(1, +\infty)$. Сумма функционального ряда $S(x)$ представляет собой функцию, определенную на области сходимости ряда.

5.2 Равномерная сходимость функционального ряда

Конечные суммы сохраняют свойства своих слагаемых. Например, сумма конечного числа непрерывных функций также непрерывна. Обладают ли бесконечные суммы функций, т.е. функциональные ряды, аналогичными свойствами? Рассмотрим пример. Функциональный ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^2}{(1+x^2)^n}$$

представляет собой при $x \neq 0$ сумму геометрической прогрессии со знаменателем $q = \dfrac{1}{1+x^2}$, $0 < q < 1$. Все члены этого ряда равны нулю при $x = 0$. Следовательно, данный ряд определен и сходится при всех x, причем его сумма

$$S(x) = \frac{x^2}{1 - \dfrac{1}{1+x^2}} = 1 + x^2 \qquad x \neq 0,$$

$$S(0) = 0.$$

Таким образом, сумма ряда терпит разрыв при $x = 0$, несмотря на то, что члены ряда непрерывны при всех x.

Функциональные свойства суммы ряда зависят от характера сходимости самого ряда.

Пусть функциональный ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} u_n(x)$ сходится на множестве X. $S_n(x)$, $S(x)$ – частичная сумма и сумма этого ряда соответственно.

Функциональный ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} u_n(x)$ называется равномерно сходящимся на множестве X, если этот ряд сходится при всех x, принадлежащих множеству X, и для любого $\varepsilon > 0$ найдется такой номер N, что для всех номеров $n > N$ и для любого $x \in X$ будет выполнено неравенство

$$|S_n(x) - S(x)| < \varepsilon.$$

Другими словами, ряд сходится равномерно на множестве X, если разность между частичной суммой и суммой ряда становится сколь угодно малой, начиная с некоторого номера, одновременно для всех x, принадлежащих множеству X. Рассмотрим примеры.

Пример 1. Ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{(-1)^{n+1}}{n + x^{2n}}$ сходится при всех x как знакочередующийся ряд Лейбница.

В случае, когда $|x| = 1$ или $|x| > 1$ легко убедиться в том, что члены ряда монотонно убывают по модулю, т.к. с ростом n увеличивается знаменатель дроби. В случае, когда $|x| < 1$ проверим, что выполняется неравенство

$$\frac{1}{n + 1 + x^{2n+2}} < \frac{1}{n + x^{2n}},$$

которое равносильно неравенству

$$n + x^{2n} < n + 1 + x^{2n+2},$$

которое, в свою очередь, равносильно неравенству $x^{2n}(1 - x^2) < 1$ а последнее верно при $x \in (-1, 1)$. Общий член данного ряда стремится к нулю с ростом n при всех x. Воспользуемся оценкой остатка ряда Лейбница

$$|S_n(x) - S(x)| < |u_{n+1}(x)| = \frac{1}{n + 1 + x^{2n+2}} \leq \frac{1}{n + 1} < \varepsilon.$$

Разрешая данное неравенство относительно n, получим $n > \dfrac{1}{\varepsilon} - 1$. В качестве номера N можно выбрать, например, число, на единицу большее целой части числа $\dfrac{1}{\varepsilon}$. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ существует такой номер N, что для всех номеров $n > N$ будет верно неравенство

$$|S_n(x) - S(x)| < \varepsilon,$$

т.е. данный ряд сходится равномерно на всей числовой оси.

Пример 2. Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x^n$ является суммой геометрической прогрессии и сходится при всех $x \in (-1, 1)$.

Вычислим сумму остатка этого ряда

$$r_n(x) = x^{n+1} + x^{n+2} + \ldots = \frac{x^{n+1}}{1-x}.$$

Если зафиксировать номер n, то

$$\lim_{x \to 1+0} |r_n(x)| = \frac{1}{2}, \quad \lim_{x \to 1-0} |r_n(x)| = +\infty.$$

Это доказывает, что для всех $x \in (-1, 1)$ невозможно осуществить выполнение неравенства $|r_n(x)| < \varepsilon$, например, для $\varepsilon = \dfrac{1}{2}$, при одном и том же номере n. Таким образом, данный ряд сходится на интервале $(-1, 1)$ неравномерно.

При исследовании функциональных рядов на практике удобно пользоваться достаточными условиями равномерной сходимости.

5.3 Теорема Вейерштрасса

Теорема Вейерштрасса (достаточное условие равномерной сходимости). Если члены функционального ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ при всех x, принадлежащих множеству X, удовлетворяет неравенству

$$|u_n(x)| \leq a_n, \quad n = 1, 2, 3, \ldots,$$

где a_n – члены некоторого сходящегося числового ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, то функциональный ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ сходится абсолютно и равномерно на множестве X.

<u>Доказательство</u>. Абсолютная сходимость функционального ряда при всех $x \in X$ следует из признака сравнения и из сходимости числового ряда. Покажем, что функциональный ряд сходится равномерно на множестве X. Из условия теоремы следует, что для любого натурального числа k и для любого $x \in X$ верно неравенство

$$|u_{n+1}(x) + u_{n+2}(x) + \ldots + u_{n+k}(x)| \leq |u_{n+1}(x)| + |u_{n+2}(x)| + \\ + \ldots + |u_{n+k}(x)| \leq a_{n+1} + a_{n+2} + \ldots + a_{n+k} \leq \rho_n,$$

где ρ_n – остаток числового ряда. Переходя в этом неравенстве к пределу при условии $k \to \infty$, получим $|r_n(x)| \leq \rho_n$, где $r_n(x)$ – остаток функционального ряда.

Т.к. по условию теоремы числовой ряд сходится, то для любого $\varepsilon > 0$ найдется такой номер N, что для всех номеров $n > N$ будет выполнено неравенство $\rho_n < \varepsilon$, а, значит, и для остатка функционального ряда верно, что $|r_n(x)| < \varepsilon$ для всех $x \in X$, т.е. функциональный ряд сходится равномерно на множестве X.

<u>Замечание</u>. Числовой ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, удовлетворяющий условиям теоремы Вейерштрасса, называется мажорирующим числовым рядом для функционального ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ или числовой мажорантой.

<u>Пример 1</u>. Доказать, что функциональный ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\cos nx}{n^2}$ сходится равномерно при всех x.

Мажорирующим числовым рядом для данного функционального ряда является ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^2}$, т.к. $|\dfrac{\cos nx}{n^2}| \leq \dfrac{1}{n^2}$ при всех x. А так как ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^2}$ сходится, то данный функциональный ряд сходится равномерно на всей числовой оси.

Пример 2. Доказать, что функциональный ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{x}{n^3+x^3}$ сходится равномерно на промежутке $[0, +\infty)$.

Члены данного функционального ряда неотрицательны при $x \in [0, +\infty)$. Для построения мажоранты найдем при каждом фиксированном n максимальное значение функции $u_n(x) = \dfrac{x}{n^3+x^3}$. Для этого вычислим

$$u_n'(x) = \frac{n^3+x^3-3x^3}{(n^3+x^3)^2} = \frac{-2x^3+n^3}{(n^3+x^3)^2} = \frac{-2\Big(x^3 - \dfrac{n^3}{2}\Big)}{(n^3+x^3)^2}.$$

$u_n'(x) = 0$ при $x = \dfrac{n}{\sqrt[3]{2}}$ и эта точка является точкой максимума функции $u_n(x)$.

$$\big(u_n(x)\big)_{max} = u_n\Big(\frac{n}{\sqrt[3]{2}}\Big) = \frac{\dfrac{n}{\sqrt[3]{2}}}{n^3 + \dfrac{n^3}{2}} = \frac{2}{3\sqrt[3]{2}} \cdot \frac{1}{n^2} = \frac{\sqrt[3]{4}}{3} \cdot \frac{1}{n^2}.$$

Значит, члены функционального ряда на множестве $[0, +\infty)$ удовлетворяют неравенству

$$0 \leq u_n(x) \leq \frac{\sqrt[3]{4}}{3} \cdot \frac{1}{n^2}.$$

А т.к. числовой ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^2}$ сходится, то числовой ряд, общий член которого равен $\dfrac{\sqrt[3]{4}}{3} \cdot \dfrac{1}{n^2}$, также сходится. В силу теоремы Вейерштрасса данный функциональный ряд сходится равномерно на промежутке $[0, +\infty)$.

§6 Свойства равномерно сходящихся рядов

Рассматривая ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{x^2}{(1+x^2)^n}$, который сходится при всех x и все члены которого непрерывны на всей числовой оси, мы обнаружили, что сумма ряда терпит разрыв в точке $x = 0$. Это объясняется неравномерностью сходимости данного ряда на любом множестве, содержащем точку $x = 0$. Покажем это, оценивая остаток ряда при $x \neq 0$

$$r_n(x) = \frac{x^2}{(1+x^2)^n} + \frac{x^2}{(1+x^2)^{n+1}} + \ldots = \frac{\dfrac{x^2}{(1+x^2)^n}}{1 - \dfrac{1}{1+x^2}} =$$

$$= \frac{1}{(1+x^2)^{n-1}}, \; \lim_{x\to 0} r_n(x) = \lim_{x\to 0} \frac{1}{(1+x^2)^{n-1}} = 1.$$

Т.е. остаток ряда не может быть сколь угодно мал одновременно при всех x ни для какого номера n.

Ряд сходится неравномерно на множестве, содержащем точку $x = 0$.

Перейдем к изучению свойств функциональных рядов, сходящихся равномерно на некотором отрезке.

6.1 Непрерывность суммы равномерно сходящегося ряда

Теорема. Пусть функции $u_n(x)$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ определены и непрерывны на отрезке $[a, b]$, а ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ сходится равномерно на этом отрезке. Тогда сумма ряда $S(x)$ непрерывна на этом отрезке.

Доказательство. Зафиксируем произвольную точку x_0, принадлежащую отрезку $[a, b]$, и для любого значения x, также принадлежащего отрезку $[a,b]$, оценим разность

$$|S(x)-S(x_0)| =$$
$$= \big|\big(S(x)-S_n(x)\big)-\big(S(x_0)-S_n(x_0)\big)+\big(S_n(x)-S_n(x_0)\big)\big| \le$$
$$\le |S(x)-S_n(x)|+|S(x_0)-S_n(x_0)|+|S_n(x)-S_n(x_0)|.$$

Выберем произвольное число $\varepsilon>0$. В силу равномерной сходимости ряда можно фиксировать номер n такой, что неравенство $|S(x)-S_n(x)|<\dfrac{\varepsilon}{3}$ будет выполнено для всех $x\in[a,b]$, в том числе и для x_0. При фиксированном n частичная сумма ряда $S_n(x)$ является непрерывной на отрезке $[a,b]$ как сумма конечного числа непрерывных функций. Поэтому для выбранного $\varepsilon>0$ найдется такое число $\delta>0$, что для любого x, удовлетворяющего неравенству $|x-x_0|<\delta$, будет выполнено неравенство

$$|S_n(x)-S_n(x_0)|<\frac{\varepsilon}{3}$$

Тогда разность

$$|S(x)-S(x_0)|<\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}=\varepsilon,$$

что доказывает непрерывность суммы ряда в точке x_0, а т.к. x_0 выбрано произвольно на отрезке $[a,b]$, то $S(x)$ непрерывна на $[a,b]$.

Другие свойства равномерно сходящихся рядов сформулируем без доказательства.

6.2 Почленное интегрирование

Теорема. Если функции $u_n(x)$ $(n=1,2,3,\ldots)$ непрерывны на отрезке $[a,b]$, а ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ сходится равномерно на этом отрезке, то интеграл от суммы ряда $S(x)$ на отрезке $[a,b]$ представляется в виде суммы интегралов от членов этого ряда

$$\int\limits_a^b S(x)dx=\sum_{n=1}^{\infty}\int\limits_a^b u_n(x)dx.$$

Замечание. Интегрирование можно выполнить на любом отрезке, принадлежащем отрезку $[a, b]$.

Пример. Вычислить сумму числового ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n}{3^n}$.

Пусть S – искомая сумма, представим S в виде

$$S = \frac{1}{3} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{3^{n-1}}$$

Рассмотрим функциональный ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n \cdot x^{n-1}$. На любом отрезке, принадлежащем интервалу $(-1, 1)$, этот ряд сходится равномерно, т.к. мажорируется сходящимся числовым рядом. Пусть $\sigma(x)$ – сумма этого ряда, тогда

$$S = \frac{1}{3}\,\sigma\Big(\frac{1}{3}\Big).$$

Применим к построенному функциональному ряду теорему о почленном интегрировании. Интегрирование выполним на отрезке $[0, x]$, полагая, что $x \in (-1, 1)$.

$$\int_0^x \sigma(x)dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^x n \cdot x^{n-1} dx = \sum_{n=1}^{\infty} x^n = \frac{x}{1-x}.$$

Тогда

$$\sigma(x) = \Big(\frac{x}{1-x}\Big)' = \frac{1}{(1-x)^2}.$$

Искомая сумма $S = \dfrac{1}{3} \cdot \dfrac{1}{\Big(1 - \dfrac{1}{3}\Big)^2} = \dfrac{3}{4}$.

6.3 Почленное дифференцирование

Теорема. Пусть функции $u_n(x)$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ определены и непрерывны на отрезке $[a, b]$ и имеют на этом отрезке непрерывные производные $u_n'(x)$. Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ сходится, а ряд

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n'(x)$ сходится равномерно на отрезке $[a,b]$. Тогда сумма $S(x)$ ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ дифференцируема на отрезке $[a,b]$, причем производная суммы равна сумме ряда из производных

$$S'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n'(x).$$

Пример. Вычислить сумму числового ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n n}$.

Рассмотрим функциональный ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$, который сходится на интервале $(-1,1)$. Обозначим исходную сумму числового ряда S, а сумму функционального ряда $S(x)$. Тогда $S = S\Big(\frac{1}{2}\Big)$. Рассмотрим ряд из производных $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x^{n-1}$. Этот ряд сходится равномерно на любом отрезке, принадлежащем интервалу $(-1,1)$, т.к. мажорируется сходящимся числовым рядом, Применим к данному ряду теорему о почленном дифференцировании

$$S'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} x^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}.$$

Учитывая, что $S(0)=0$, получим $S = -\ln(1-x)$. Искомая сумма $S = S\Big(\frac{1}{2}\Big) = -\ln\Big(1-\frac{1}{2}\Big) = \ln 2$.

§7 Степенные ряды

Степенным рядом называется функциональный ряд вида

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots$$

Рассматриваются также степенные ряды более общего вида

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n = a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)^2 + \ldots$$

которые с помощью замены $(x-x_0)$ на новую переменную сводятся к рядам вида $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, изучением которых можно ограничиться. Выясним, какой вид имеет область сходимости степенного ряда.

7.1 Теорема Абеля

Теорема Абеля. Если степенной ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ сходится в некоторой точке $x_0 \neq 0$, то он абсолютно сходится в любой точке x, такой что $|x| < |x_0|$.

Доказательство. Из сходимости ряда $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x_0^n$ следует, что его общий член стремится к нулю, а, значит, ограничен, т.е. существует положительное число M такое, что

$$|a_n x_0^n| \leq M, \quad n = 0, 1, 2, 3, \ldots$$

Возьмем произвольное x, для которого $|x| < |x_0|$ и рассмотрим ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} |a_n x^n|$. Оценим его общий член

$$|a_n x^n| = \left|a_n x_0^n \Big(\frac{x}{x_0}\Big)^n\right| = |a_n x_0^n| \left|\frac{x}{x_0}\right|^n \leq M q^n,$$
$$\text{где} \quad q = \left|\frac{x}{x_0}\right| < 1$$

Общий член рассматриваемого ряда меньше, чем соответствующие члены бесконечно убывающей геометрической прогрессии. Значит, степенной ряд сходится абсолютно в точке x. Теорема доказана.

7.2 Интервал и радиус сходимости степенного ряда

Заметим, что любой степенной ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ сходится при $x = 0$. Рассмотрим ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} n! x^n$. Применим для нахождения его области сходимости признак Даламбера

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{(n+1)!\,x^{n+1}}{n!\,x^n}\right| = |x|\lim_{n\to\infty}(n+1)=\infty, \quad \text{если} \quad x\neq 0.$$

Значит, данный ряд сходится только в одной точке $x_0 = 0$.

Предположим, что для степенного ряда существуют отличные от нуля значения x, при которых он сходится. Если множество этих значений не ограничено, то согласно теореме Абеля ряд сходится всюду, причем абсолютно.

Пусть множество значений x, при которых степенной ряд сходится, ограничено, и положительное число R – точная верхняя грань этого множества. Если $|x| < R$, то найдется значение x_0 такое, что $|x| < |x_0| \leq R$, при котором ряд сходится. Тогда согласно теореме Абеля ряд сходится абсолютно в точке x. Итак, степенной ряд сходится абсолютно в интервале $(-R, R)$ и расходится вне этого интервала. На концах интервала, т.е. при $x = \pm R$ может иметь место как сходимость, так и расходимость ряда.

Интервал $(-R, R)$ называется интервалом сходимости степенного ряда, а число R – радиусом сходимости. Если степенной ряд сходится на всей числовой оси, то его радиус сходимости $R = \infty$, а если ряд сходится только в одной точке $x = 0$, то – $R = 0$.

Замечание 1. Степенной ряд вида $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n$ сходится или в интервале $(x_0 - R,\, x_0 + R)$ с центром в точке x_0, или на всей числовой оси, или только в точке $x = x_0$.

Замечание 2. Интервал сходимости степенного ряда может быть найден с помощью признаков Даламбера или Коши. Для установления сходимости или расходимости на концах интервала требуется дополнительное исследование с помощью других теорем.

Пример 1. Найти область сходимости степенного ряда $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{(n+1)}{2^n}\, x^n$.

Применим признак Даламбера

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{(n+2)x^{n+1}}{2^{n+1}}\cdot\frac{2^n}{(n+1)x^n}\right| = \frac{|x|}{2}\lim_{n\to\infty}\frac{n+2}{n+1} = \frac{|x|}{2} < 1 \ \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow\ |x| < 2 \ \Leftrightarrow\ -2 < x < 2.$$

$(-2,2)$ – интервал сходимости, $R = 2$ – радиус сходимости.

Исследуем сходимость на концах интервала. Обозначая общий член ряда $u_n(x)$, вычислим его значения на концах интервала

$$u_2(-2) = (-1)^n(n+1), \quad u_n(2) = n+1.$$

При $x = \pm 2$ не выполняется необходимое условие сходимости, следовательно, на концах интервала ряд расходится.

Пример 2. Найти область сходимости степенного ряда
$\sum\limits_{n=2}^{\infty}(-1)^n\dfrac{(x+1)^n}{3^n \ln\, n}$.

Применим признак Даламбера

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{(x+1)x^{n+1}}{3^{n+1}\ln(n+1)}\cdot\frac{3^n \ln\, n}{(x+1)^n}\right| = \frac{|x+1|}{3}\lim_{n\to\infty}\frac{\ln\, n}{\ln(n+1)} =$$
$$= \frac{|x+1|}{3}.$$

При вычислении $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\ln\, n}{\ln(n+1)}$ используется правило Лопиталя

$$\lim_{t\to\infty}\frac{\ln\, t}{\ln(t+1)} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \lim_{t\to\infty}\frac{\dfrac{1}{t}}{\dfrac{1}{t+1}} = \lim_{t\to\infty}\frac{t+1}{t} = 1 \quad \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \quad \lim_{n\to\infty}\frac{\ln\, n}{\ln(n+1)} = 1.$$

Интервал сходимости определяется из неравенства

$$\frac{|x+1|}{3} < 1 \quad \Leftrightarrow \quad |x+1| < 3 \quad \Leftrightarrow \quad -3 < x+1 < 3 \quad \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \quad -4 < x < 2.$$

$(-4, 2)$ – интервал сходимости, $R = 3$ – радиус сходимости. Исследуем сходимость на концах интервала. При $x = -4$ получим положительный ряд $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \dfrac{1}{\ln n}$. Сравним его с гармоническим рядом $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n}$. Покажем, что для любого номера $n = 2, 3, 4, \ldots$ выполнено неравенство

$$\frac{1}{\ln n} > \frac{1}{n} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\ln n}{n} < 1.$$

Для этого рассмотрим функцию $f(x) = \dfrac{\ln x}{x}$ и вычислим ее производную $f'(x) = \dfrac{1 - \ln x}{x^2}$ при $x > e$. Так как

$$f(2) = \frac{\ln 2}{2} < 1, \quad f(3) = \frac{\ln 3}{3} < 1,$$

а при $x > e$ $f(x)$ убывает, то ее значения меньше 1 при всех $n = 2, 3, 4, \ldots$. Члены полученного ряда больше, чем соответствующие члены гармонического ряда, т.е. при $x = -4$ ряд расходится. При $x = 2$ получим ряд $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{\ln n}$, который сходится условно как знакочередующийся ряд Лейбница.

Пример 3. Найти область сходимости степенного ряда $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{x^n}{n!}$.

Применим признак Даламбера

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{x^n} \right| = |x| \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} = 0 \quad \text{при всех} \quad x.$$

Следовательно, область сходимости данного ряда – вся числовая ось.

7.3 Равномерная сходимость степенного ряда, его почленное интегрирование и дифференцирование

Теорема. Степенной ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ сходится равномерно на любом отрезке, принадлежащем интервалу сходимости.

Доказательство. Пусть $(-R, R)$ – интервал сходимости степенного ряда и $[a, b]$ – произвольный отрезок, принадлежащий этому интервалу. Обозначим x_0 – максимальное из чисел $|a|$, $|b|$. Тогда для всех $x \in [a, b]$ будет выполняться неравенство $|x| \leq |x_0|$. Степенной ряд сходится абсолютно в точке x_0, т.к. $x_0 \in (-R, R)$. Кроме того $|a_n x^n| \leq |a_n x_0^n|$. Т.е. степенной ряд мажорируется на отрезке $[a, b]$ сходящимся положительным числовым рядом, а, значит, согласно теореме Вейерштрасса, сходится на этом отрезке равномерно. Теорема доказана.

Степенные ряды обладают свойствами равномерно сходящихся функциональных рядов. Например, сумма степенного ряда непрерывна на любом отрезке, принадлежащем интервалу сходимости, а, значит, непрерывна на всем интервале. Интеграл от суммы степенного ряда $S(x)$ на любом отрезке, принадлежащем интервалу сходимости, равен сумме ряда, полученного из данного степенного ряда путем почленного интегрирования на том же отрезке

$$\int\limits_a^b S(x)dx = \sum_{n=0}^{\infty} \int\limits_a^b a_n x^n dx.$$

Если в качестве отрезка интегрирования взять отрезок $[0, x]$, где x принадлежит интервалу сходимости, то равенство приобретает вид

$$\int\limits_0^x S(x)dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1}\, x^{n+1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{n-1}}{n}\, x^n.$$

Т.е. в результате почленного интегрирования степенного ряда на отрезке $[0, x]$ получается также степенной ряд. Пользуясь, например, признаком Даламбера, можно показать, что радиус сходимости полученного ряда совпадает с радиусом сходимости исходного ряда.

При почленном дифференцировании степенного ряда $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ получим также степенной ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n\, n\, x^{n-1} =$ $= \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_{n+1}(n+1)\, x^n$ с тем же радиусом сходимости. Это означает, что сумма степенного ряда дифференцируема на интервале сходимости, и производная суммы равна сумме ряда из производных. Почленное дифференцирование можно применить повторно к ряду из производных первого порядка, второго и т.д. Значит, сумма степенного ряда имеет внутри интервала сходимости производные всех порядков.

Замечание. При почленном интегрировании и дифференцировании степенного ряда интервал сходимости сохраняется. Сходимость на концах интервала может появляться или исчезать.

Пример 1. Найти сумму ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \dfrac{x^n}{n}$.

Данный ряд сходится на промежутке $(-1, 1]$. Обозначим $S(x)$ его сумму и применим теорему о почленном дифференцировании

$$S'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1}\, x^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n\, x^n = \frac{1}{1+x}.$$

Полученный в результате почленного дифференцирования степенной ряд является суммой геометрической прогрессии и сходится на интервале $(-1, 1)$. Учитывая, что $S(0) = 0$, найдем $S(x) = \ln(1+x)$

Пример 2. Найти сумму ряда $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (n+1)\, x^n$.

Данный ряд сходится на интервале $(-1, 1)$. Обозначим $S(x)$ его сумму и применим теорему о почленном интегрировании

$$\int\limits_0^x S(x)dx = \sum_{n=0}^{\infty} x^{n+1} = \sum_{n=1}^{\infty} x^n \frac{x}{1-x}.$$

Полученный в результате почленного интегрирования степенной ряд является суммой геометрической прогрессии и сходится на интервале $(-1, 1)$.

$$S(x) = \left(\frac{x}{1-x}\right)' = \frac{1}{(1-x)^2}.$$

§8 Ряд Тейлора

8.1 Представление функций степенными рядами

Частичными суммами степенных рядов являются многочлены, что делает степенные ряды удобным средством для приближенных вычислений. Поэтому особое значение имеет вопрос о представлении функций степенными рядами.

Предположим, что заданная функция $f(x)$ в некотором интервале с центром в точке x_0 имеет производные всех порядков. Тогда согласно формуле Тейлора для всех значений x из этого интервала имеет место равенство

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \ldots +$$
$$+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + R_n(x),$$

где $R_n(x)$ – остаточный член формулы Тейлора и может быть записан разными способами, например, в форме Лагранжа

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(x_1)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}, \quad \text{где} \quad x_1 \in (x_0, x).$$

При этом n можно выбрать сколь угодно большим, т.е. учитывать в этой формуле сколь угодно большие степени переменной $(x - x_0)$. Естественно возникает вопрос о возможности представления функции $f(x)$ в виде бесконечной суммы или в виде степенного ряда

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \ldots +$$
$$+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + \ldots$$

Такой ряд, независимо от того, сходится он или не сходится к функции $f(x)$ в некотором интервале, называется рядом Тейлора этой функции, а его коэффициенты – коэффициентами Тейлора. Если $x_0 = 0$, то данный степенной ряд называется рядом Маклорена

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}\,x + \frac{f''(0)}{2!}\,x^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}\,x^n + \ldots$$

8.2 Условие сходимости ряда Тейлора заданной функции к этой функции

Согласно формуле Тейлора разность между значениями функции $f(x)$ и частичной суммой ряда Тейлора с номером $(n+1)$ этой функции равна остаточному члену формулы Тейлора $R_n(x)$. Поэтому справедливо следующее утверждение: для того чтобы при некотором значении x значение функции $f(x)$ совпадало с суммой ряда Тейлора этой функции необходимо и достаточно, чтобы остаточный член формулы Тейлора при этом значении x стремится к нулю с возрастанием n

$$\lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0.$$

Рассмотрим функцию

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}}, & x \neq 0 \\ 0 & x = 0. \end{cases}$$

Можно показать, что эта функция на всей числовой оси имеет производные всех порядков, и все ее производные при $x = 0$ равны 0. Ряд Маклорена этой функции сходится при всех x, и сумма его тождественно равна 0. Таким образом, данная функция не представляется своим рядом Маклорена ни в какой окрестности точки $x = 0$.

Для того чтобы выяснить, сходится ли ряд Тейлора заданной функции к этой функции, в ряде случаев оказывается полезным следующее утверждение если функция $f(x)$ в некотором интервале с центром в точке x_0 имеет производные всех порядков и все производные для всех x из этого интервала ограничены одним и тем же числом

$$|f^{(n)}(x)| \le M,$$

то ряд Тейлора этой функции сходится к самой функции на данном интервале. Это утверждение применимо к таким элементарным функциям как e^x, $\cos x$, $\sin x$. Например, функции $\sin x$ и $\cos x$ дифференцируемы всюду бесконечное число раз, и все их производные ограничены по модулю единицей. Значит, эти функции можно разложить в ряды Тейлора на любом интервале с центром в любой точке.

8.3 Единственность представления функции степенным рядом

Теорема. Если функция $f(x)$ представима на некотором интервале с центром в точке x_0 степенным рядом

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n,$$

то этот ряд является рядом Тейлора этой функции.

Доказательство. Полагая $x = x_0$ в формуле $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$, получим $f(x_0) = a_0$. Применим к данному степенному ряду теорему о почленном интегрировании

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n\, n\, (x - x_0)^{n-1},$$

$$f''(x) = \sum_{n=2}^{\infty} a_n\, n(n-1)\, (x - x_0)^{n-2},$$

$$\ldots$$

$$f^{(k)}(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n\, n(n-1) \cdot \ldots \cdot (n-k+1)\, (x - x_0)^{n-k},$$

$$\ldots$$

Полагая в этих равенствах $x = x_0$, получим

$$
\begin{aligned}
&f'(x_0) = a_1 \cdot 1,\\
&f''(x_0) = a_2 \cdot 2 \cdot 1,\\
&\ldots\\
&f^{(k)}(x) = a_k \cdot k \cdot (k-1) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1,\\
&\ldots
\end{aligned}
$$

Значит, для коэффициентов ряда справедливы формулы

$$a_0 = f(x_0),\;\; a_1 = \frac{f'(x_0)}{1!},\;\; a_2 = \frac{f''(x_0)}{2!}, \ldots, a_k = \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}, \ldots$$

т.е. данный ряд является рядом Тейлора этой функции. Теорема доказана.

8.4 Разложение основных элементарных функций

Выпишем разложения в ряды Маклорена основных элементарных функций

$$
\begin{aligned}
&e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \ldots, \quad x \in (-\infty, +\infty),\\
&\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \ldots,\\
&x \in (-\infty, +\infty),\\
&\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \ldots,\\
&x \in (-\infty, +\infty),\\
&\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \ldots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + \ldots,\\
&x \in (-1, 1],\\
&(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!} x^2 + \ldots +\\
&+ \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{n!} x^n + \ldots, \quad x \in (-1, 1).
\end{aligned}
$$

Последнее разложение при $\alpha = -1$ принимает вид

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - \ldots + (-1)^n x^n + \ldots, \quad x \in (-1, 1).$$

8.5 Разложение функций в ряд Тейлора с использованием известных разложений

Пример 1. Разложить функцию $y = \sin^2 x$ в ряд Маклорена.

Воспользуемся тригонометрическим тождеством

$$\sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2},$$

а затем табличным разложением функции $\cos x$, заменяя переменную x на переменную $2x$

$$\sin^2 x = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\Big(1 - \frac{(2x)^2}{2!} + \frac{(2x)^4}{4!} - \ldots + (-1)^n \frac{(2x)^{2n}}{(2n)!} + \ldots\Big) =$$

$$= \frac{2}{2!}\,x^2 + \frac{2^3}{4!}\,x^4 - \ldots + (-1)^{n+1}\frac{2^{2n-1}}{(2n)!}\,x^{2n} + \ldots, \quad x \in (-\infty, \infty).$$

Пример 2. Разложить функцию $y = \ln(x^2 + 5x + 6)$ в ряд Тейлора в окрестности точки $x_0 = -1$, т.е. по степеням переменной $(x + 1)$.

Пользуясь свойствами логарифмической функции, выполним тождественные преобразования

$$y = \ln(x^2 + 5x + 6) = \ln\big((x+2)(x+3)\big) =$$
$$= \ln(x+2) + \ln(x+3) =$$
$$= \ln\big(1 + (x+1)\big) + \ln\big(2 + (x+1)\big) =$$
$$= \ln 2 + \ln\big(1 + (x+1)\big) + \ln\Big(1 + \frac{x+1}{2}\Big)$$

а затем применим табличное разложение функции $\ln(x+1)$, делая соответствующие замены

$$y = \ln 2 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1}\frac{(x+1)^n}{n} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1}\frac{(x+1)^n}{2^n\, n} =$$

$$= \ln 2 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}\Big(1 + \frac{1}{2^n}\Big)(x+1)^n.$$

Чтобы найти значения x, для которых справедлива полученная формула, решим систему неравенств

$$\begin{cases} -1 < x+1 \le 1 \\ -1 < \dfrac{x+1}{2} \le 1 \end{cases} \Leftrightarrow\ -1 < x+1 \le 1\ \Leftrightarrow\ -2 < x \le 0.$$

Пример 3. Разложить в ряд Маклорена функцию $y = \operatorname{arctg} x$.

Воспользуемся табличным разложением для представления степенным рядом производной этой функции

$$y' = (\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - \ldots + (-1)^n x^{2n} + \ldots,$$
$$x \in (-1, 1).$$

Тогда

$$\operatorname{arctg} x = \int\limits_0^x \frac{dx}{1+x^2} = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)} + \ldots,$$
$$x \in [-1, 1].$$

Заметим, что производная представляется степенным рядом на интервале $(-1, 1)$, а сама функция – на отрезке $[-1, 1]$.

8.6 Приближенные вычисления значений функций и определенных интегралов

Рассмотрим примеры применения ряда Тейлора для приближенных вычислений.

Пример 1. Вычислить $\sqrt[3]{2}$ с точностью до 5 знаков после запятой.

Для решения задачи воспользуемся табличным разложением функции $(1+x)^\alpha$ при $\alpha = \dfrac{1}{3}$

$$(1+x)^{\frac{1}{3}} = 1 + \frac{1}{3}x + \frac{\frac{1}{3}(\frac{1}{3}-1)}{2!}x^2 + \frac{\frac{1}{3}(\frac{1}{3}-1)\ldots(\frac{1}{3}-2)}{3!}x^3 + \ldots =$$

$$= 1 + \frac{1}{3}x - \frac{1}{9}x^2 + \frac{5}{81}x^3 - \ldots,$$

$$\sqrt[3]{2} = \sqrt[3]{\frac{128}{64} \cdot \frac{125}{125}} = \frac{5}{4}\sqrt[3]{\frac{128}{125}} = \frac{5}{4}\Big(1 + \frac{3}{125}\Big)^{\frac{1}{3}} =$$

$$= \frac{5}{4}\left(1 + \frac{1}{125} - \frac{1}{125^2} + \frac{1}{75 \cdot 125^2} - \ldots\right)$$

Последнее выписанное слагаемое этой суммы меньше, чем 10^{-5}. Кроме того, полученный числовой ряд является знакочередующимся рядом Лейбница, поэтому ошибка при замене суммы ряда на частичную сумму не превосходит по модулю первого отброшенного члена ряда. Значит, для достижения заданной точности достаточно учесть первые три члена ряда

$$\sqrt[3]{2} \approx \frac{5}{4}\,(1 + 0,008 - 0,000064) = 1.25992.$$

Пример 2. Вычислить с точностью до 3 знаков после запятой $\int\limits_0^{\frac{1}{2}} \frac{\operatorname{arctg} x}{x}\,dx$.

Воспользуемся полученным разложением функции $\operatorname{arctg} x$ в ряд Маклорена

$$\int\limits_0^{\frac{1}{2}} \frac{\operatorname{arctg} x}{x}\,dx = \int\limits_0^{\frac{1}{2}} \Big(1 - \frac{x^2}{3} + \frac{x^4}{5} - \frac{x^6}{7} + \ldots\Big)dx =$$

$$= \Big(x - \frac{x^3}{3^2} + \frac{x^5}{5^2} - \frac{x^7}{7^2} + \ldots\Big)\Big|_0^{\frac{1}{2}} =$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{1}{2^3 3^2} + \frac{1}{2^5 5^2} - \frac{1}{2^7 7^2} + \ldots$$

Получен знакочередующийся ряд Лейбница, последнее выписанное слагаемое меньше, чем 10^{-3}. Отбрасывая это слагаемое, получим приближенное значение интеграла с заданной точностью

$$\int\limits_0^{\frac{1}{2}} \frac{\operatorname{arctg} x}{x}\,dx \approx 0,5 - 0,0138 + 0,0012 \approx 0,487.$$

§9 Тригонометрический ряд Фурье

При решении многих технических задач приходится иметь дело с периодическими процессами, для описания которых требуются периодические функции. Простейшей периодической функцией периода 2π является функция $\sin(x+\alpha)$. При сложении периодических функций $\sin(x+\alpha_1)$, $\sin(2x+\alpha_2)$, $\ldots$, $\sin(nx+\alpha_n)$, периоды которых равны соответственно 2π, $\pi, \ldots,$
$\dfrac{\pi}{n}$, получим периодическую функцию с периодом 2π. Естественно возникает обратный вопрос можно ли заданную периодическую функцию $f(x)$ с периодом 2π представить в виде суммы конечного или бесконечного числа простейших периодических функций вида $\sin(nx+\alpha_n)$

$$f(x) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin(nx+\alpha_n).$$

Постоянное слагаемое A_0 можно считать периодической функцией с любым периодом, в том числе и с периодом 2π.

В механике функция $\sin(nx+\alpha_n)$ описывает простейшее гармоническое колебательное движение. Представление периодической функции $f(x)$ в виде суммы простейших периодических функций можно рассматривать как разложение сложного колебания на отдельные гармонические колебания. Функции вида $\sin(nx+\alpha_n)$, входящие в состав разложения периодической функции $f(x)$, называются гармоническими составляющими этой функции или просто гармониками. Пользуясь тригонометрическим тождеством

$$\sin(nx+\alpha_n) = \sin\alpha_n \cos nx + \sin nx \cos\alpha_n.$$

и обозначая $A_n \sin\alpha_n = a_n$, $A_n \cos\alpha_n = b_n$, разложение периодической функции $f(x)$ можно переписать в виде

$$f(x) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \big(a_n \cos nx + b_n \sin nx\big). \tag{1}$$

9.1 Тригонометрический ряд Фурье. Коэффициенты Фурье

Пусть функция $f(x)$ определена на всей числовой оси, периодична с периодом 2π и является непрерывной или кусочно-непрерывной на отрезке $[\pi, \pi]$ (функция называется кусочно-непрерывной на отрезке, если она непрерывна во всех точках этого отрезка за исключением конечного числа точек, в которых функция терпит разрыв первого рода, т.е. в этих точках существуют конечные односторонние пределы функции, не равные друг другу).

Предполагая, что $f(x)$ представляется в виде суммы простейших тригонометрических функций, найдем коэффициенты ряда (9.1). С этой целью проинтегрируем обе части равенства (9.1) на отрезке $[-\pi, \pi]$, что оправдано, например, в случае равномерной сходимости на этом отрезке функционального ряда, стоящего в правой части равенства (9.1). Воспользуемся тем, что

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos nx dx = \frac{\sin nx}{n}\Big|_{-\pi}^{\pi} = 0, \quad \int_{-\pi}^{\pi} \sin nx dx = -\frac{\cos nx}{n}\Big|_{-\pi}^{\pi} = 0.$$

Тогда $\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = A_0 \cdot 2\pi$, откуда $A_0 = \dfrac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)dx$.

Для вычисления коэффициентов a_n умножим обе части равенства (9.1) на $\cos nx$ и проинтегрируем на отрезке $[-\pi, \pi]$. Пользуясь тем, что

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos kx \cos nx dx = 0, \quad \text{если} \quad k \neq n,$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin kx \cos nx dx = 0, \quad \text{для любых} \quad k \text{ и } n,$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 nx dx = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1+\cos 2nx}{2} dx = \pi, \quad \text{если} \quad n \neq 0,$$

получим

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx = \pi\, a_n,$$

откуда

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Аналогично

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx dx, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Чтобы формулы для коэффициентов выглядели единообразно, обозначим

$$a_0 = 2A_0 = \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x) dx.$$

Итак, для любой функции $f(x)$, кусочно-непрерывной на отрезке $[-\pi, \pi]$, можно вычислить коэффициенты

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx, \quad b_n = \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx dx, \quad n = 0, 1, 2, 3, \ldots \tag{2}$$

которые называются коэффициентами Фурье этой функции, и поставить в соответствие этой функции ряд

$$f(x) \to \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \big(a_n \cos nx + b_n \sin nx\big). \tag{3}$$

который называется тригонометрическим рядом Фурье этой функции.

Система функций

$$1,\ \cos x,\ \sin x,\ \cos 2x,\ \sin 2x, \ldots, \cos nx,\ \sin nx \ldots$$

на основе которой построен тригонометрический ряд Фурье, называется основной тригонометрической системой функций. Эта система на отрезке $[-\pi, \pi]$ обладает свойством ортогональности: интеграл от произведения любых двух функций этой системы на отрезке $[-\pi, \pi]$ равен нулю.

9.2 Теорема Дирихле

Предполагая, что функция $f(x)$ является кусочно-непрерывной на отрезке $[-\pi, \pi]$, мы поставили этой функции в соответствие ее тригонометрический ряд Фурье. Предположим теперь, что функция удовлетворяет более серьезным ограничениям, а именно, будем считать, что она является кусочно-дифференцируемой на отрезке $[-\pi, \pi]$. Это означает, отрезок $[-\pi, \pi]$ можно разделить на конечное число отрезков, внутри которых функция дифференцируема, а на концах отрезков имеет не только конечные предельные значения, но и односторонние производные при условии замены на концах этих отрезков значений функции на соответствующие предельные значения.

Теорема Дирихле устанавливает условия сходимости тригонометрического ряда Фурье и связь между значением самой функции и суммой ее тригонометрического ряда Фурье. Сформулируем теорему Дирихле без доказательства. В формулировке теоремы используем выражения $f(x_0-0)$ и $f(x_0+0)$ для обозначения односторонних пределов функции $f(x)$ при условии, что x стремится к x_0 слева и справа соответственно.

Теорема. Пусть функция $f(x)$ определена и кусочно-дифференцируема на отрезке $[-\pi, \pi]$. Тогда тригонометрический ряд Фурье этой функции сходится в каждой точке отрезке $[-\pi, \pi]$, и сумма $S(x)$ этого ряда удовлетворяет следующим условиям

1) $S(x_0) = f(x_0)$ во всех точках интервала $(-\pi, \pi)$, в которых $f(x)$ непрерывна,

2) $S(x_0) = \dfrac{1}{2}\Big(f(x_0 - 0) + f(x_0 + 0)\Big)$ во всех точках разрыва функции,

3) $S(\pi) = S(-\pi) = \dfrac{1}{2}\Big(f(-\pi + 0) + f(\pi - 0)\Big)$.

Замечание. Теорема остается справедливой в случае, когда функция $f(x)$ определена на всей числовой оси, является периодической с периодом 2π и на отрезке $[-\pi, \pi]$ кусочно-дифференцируема.

Пример. Разложить в ряд Фурье функцию $f(x)$ периода 2π, заданную на отрезке $[-\pi, \pi]$ следующим образом

$$f(x) = \begin{cases} \pi, & -\pi \le x < 0 \\ \pi - x, & 0 \le x < \pi. \end{cases}$$

Вычислим коэффициенты Фурье этой функции

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\Big(\int\limits_{-\pi}^{0} \pi dx + \int\limits_{0}^{\pi} (\pi - x) dx\Big) = \frac{3}{2}\pi, \quad \frac{a_0}{2} = \frac{3}{4}\pi,$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\Big(\int\limits_{-\pi}^{0} \pi \cos nx dx + \int\limits_{0}^{\pi} (\pi - x) \cos nx dx\Big) =$$

$$= \frac{1}{\pi n^2}(1 - \cos n\pi) = \frac{1}{\pi n^2}\big(1 - (-1)^n\big).$$

Если $n = 2k$ – четное число, то $a_n = a_{2k} = 0$.

Если $n = 2k+1$ – нечетное число, то $a_n = a_{2k+1} = \dfrac{2}{\pi(2k+1)^2}$.

$$b_n = \frac{1}{\pi}\Big(\int\limits_{-\pi}^{0} \pi \sin nx dx + \int\limits_{0}^{\pi} (\pi - x) \sin nx dx\Big) =$$

$$= \frac{\cos n\pi}{n} = \frac{(-1)^n}{n}.$$

Тригонометрический ряд Фурье $S(x)$, соответствующий данной функции, имеет вид

$$f(x) \to S(x) = \frac{3}{4}\pi + \frac{2}{\pi}\Big(\frac{\cos x}{1^2} + \frac{\cos 3x}{3^2} + \frac{\cos 5x}{5^2} + \ldots\Big) -$$

$$-\Big(\sin x - \frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sin 3x}{3} - \ldots\Big).$$

Поскольку данная функция непрерывна во всех внутренних точках отрезка $[\pi, \pi]$, то согласно теореме Дирихле для всех $x \in (-\pi, \pi)$ имеет место равенство $f(x) = S(x)$. Например, полагая $x = 0$, получим

$$\pi = \frac{3}{4}\pi + \frac{2}{\pi}\Big(\frac{1}{1^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \ldots\Big) \quad \text{или} \quad \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}.$$

На концах отрезка $[\pi, \pi]$ сумма ряда Фурье имеет следующее значение

$$S(\pm\pi) = \frac{1}{2}\Big(f(-\pi+0) + f(\pi-0)\Big) = \frac{1}{2}\,\pi.$$

На рисунках показаны графики функции $f(x)$ и суммы $S(x)$ ее ряда Фурье.

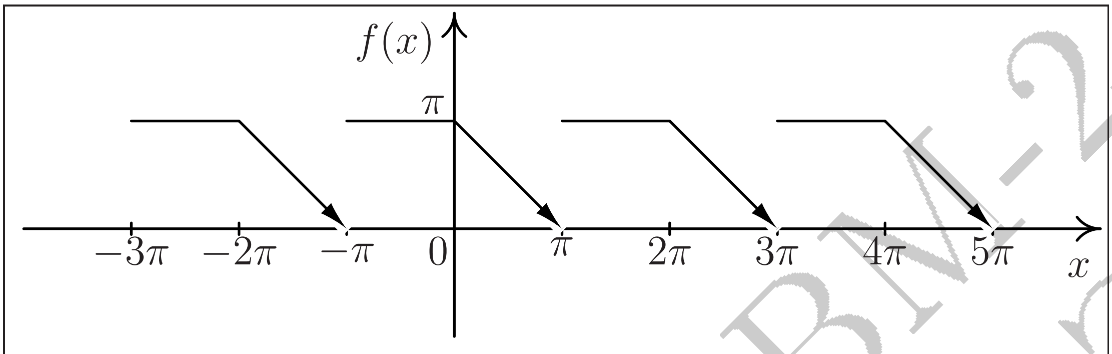

Рис. 2

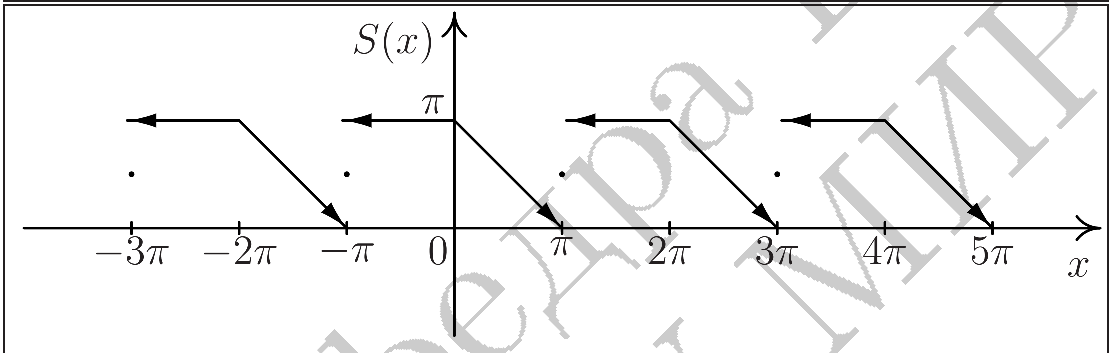

Рис. 3

9.3 Сходимость в среднем тригонометрического ряда Фурье

Пусть функция $f(x)$ определена на отрезке $[a, b]$, и ставится задача о наилучшем приближении этой функции с помощью другой функции $g(x)$ из определенного класса функций, определенных на этом же отрезке. Если требуется обеспечить близость функций во всех точках отрезка, то в качестве критерия близости рассматривается величина, равная

$$\max_{x\in[a,b]} |f(x) - g(x)|,$$

и функция $g(x)$ выбирается так, чтобы эта величина принимала наименьшее возможное значение. В этом случае обеспечивается равномерная на всем отрезке близость функций. Если требуется обеспечить близость функций на отрезке в среднем, то в качестве критерия близости рассматривают величину, равную

$$\int\limits_a^b \big(f(x)-g(x)\big)^2 dx.$$

Для достижения наилучшего приближения в среднем требуется минимизировать эту величину.

Пусть функция $f(x)$ кусочно-дифференцируема на отрезке $[-\pi,\pi]$. Тогда согласно теореме Дирихле тригонометрический ряд Фурье этой функции во всех точках непрерывности сходится к этой функции. Можно показать, что величина

$$\delta_n = \int\limits_{-\pi}^{\pi} \big(f(x)-S_n(x)\big)^2 dx,$$

характеризующая отклонение в среднем частичной суммы $S_n(x)$ тригонометрического ряда Фурье от функции $f(x)$ на отрезке $[-\pi,\pi]$, стремится к нулю при $n\to\infty$

$$\lim_{n\to\infty}\delta_n = 0.$$

Это означает, что тригонометрический ряд Фурье сходится в среднем на отрезке $[-\pi,\pi]$ к своей сумме, а коэффициенты Фурье функции $f(x)$ удовлетворяют равенству

$$\frac{a_0^2}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2+b_n^2)=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f^2(x)dx,$$

которое называется равенством Парсеваля и является аналогом теоремы Пифагора в бесконечномерном пространстве функций, кусочно-дифференцируемых на отрезке $[-\pi,\pi]$. Действительно, если считать, что квадрат "длины функции"в этом пространстве равен $\int\limits_{-\pi}^{\pi} f^2(x)dx$, что основная тригонометрическая система функций является базисом этого пространства, а ряд Фурье

- разложением функции по этому базису, то согласно равенству Парсеваля квадрат "длины функции"равен сумме квадратов ее координат.

В частном случае, когда функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[-\pi, \pi]$ и имеет кусочно-непрерывную производную на этом отрезке, то ее тригонометрический ряд Фурье сходится во всех точках этого отрезка к функции $f(x)$, причем равномерно.

9.4 Представление рядом Фурье функции произвольного периода

Пусть функция $f(x)$ определена и кусочно-дифференцируема на отрезке $[-l, l]$ или $f(x)$ определена на всей числовой оси, периодична с периодом $2l$ и кусочно-дифференцируема на отрезке $[-l, l]$. Сделав замену переменной $x = t\,\dfrac{l}{\pi}$, получим

$$f(x) = f(t\,\frac{l}{\pi}) = g(t).$$

Если функция $f(x)$ была определена на отрезке $[-l, l]$, то функция $g(t)$ определена на отрезке $[-\pi, \pi]$ и удовлетворяет на этом отрезке условиям теоремы Дирихле. Раскладывая в ряд Фурье функцию $g(t)$ и возвращаясь к исходной функции, получим для нее следующее представление рядом Фурье

$$f(x) \to \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \Big(a_n \cos\frac{\pi n x}{l} + b_n \sin\frac{\pi n x}{l}\Big), \tag{4}$$

коэффициенты которого вычисляются по формулам

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\cos\frac{\pi n x}{l}dx, \quad n = 0, 1, 2, 3, \ldots \\ b_n &= \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\sin\frac{\pi n x}{l}dx, \quad n = 1, 2, 3, \ldots \end{aligned} \tag{5}$$

Теорема Дирихле остается в силе с той лишь разницей, что в случае произвольного отрезка $[-l, l]$ точки $x = \pm\pi$ заменяются на точки $x = \pm l$

$$S(l) = S(-l) = \frac{1}{2}\big(f(-l+0) + f(l-0)\big).$$

Равенство Парсеваля принимает вид

$$\frac{1}{l}\int\limits_{-l}^{l} f^2(x)dx = \frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2 + b_n^2).$$

9.5 Тригонометрический ряд Фурье для четных и нечетных функций

Легко убедиться в том, что если кусочно-непрерывная функция $f(x)$, определенная на отрезке $[-l, l]$, является четной, то

$$\int\limits_{-l}^{l} f(x)dx = \int\limits_{-l}^{0} f(x)dx + \int\limits_{0}^{l} f(x)dx = 2\int\limits_{0}^{l} f(x)dx.$$

Действительно, сделав замену $t = -x$, вычислим

$$\int\limits_{-l}^{0} f(x)dx = -\int\limits_{l}^{0} f(-t)dt = \int\limits_{0}^{l} f(t)dt = \int\limits_{0}^{l} f(x)dx.$$

Аналогично устанавливается, что в случае нечетной функции $f(x)$

$$\int\limits_{-l}^{l} f(x)dx = \int\limits_{-l}^{0} f(x)dx + \int\limits_{0}^{l} f(x)dx = -\int\limits_{l}^{0} f(-t)dt + \int\limits_{0}^{l} f(x)dx =$$
$$= -\int\limits_{0}^{l} f(t)dt + \int\limits_{0}^{l} f(t)dt = 0.$$

Предположим теперь, что кусочно-дифференцируемая функция $f(x)$, определенная на отрезке $[-l, l]$, является четной. Тогда произведение $f(x)\cos\dfrac{\pi n x}{l}$ также является четной функцией, а произведение $f(x)\sin\dfrac{\pi n x}{l}$ – нечетной. Вычислим коэффициенты Фурье четной функции

$$a_n = \frac{1}{l}\int\limits_{-l}^{l} f(x)\cos\frac{\pi n x}{l}dx = \frac{2}{l}\int\limits_{0}^{l} f(x)\cos\frac{\pi n x}{l}dx, \quad n = 0, 1, 2, 3, \ldots$$

$$b_n = \frac{1}{l}\int\limits_{-l}^{l} f(x)\sin\frac{\pi n x}{l}dx = 0, \quad n = 1, 2, 3, \ldots$$

Таким образом, тригонометрический ряд Фурье четной функции содержит только косинусы

$$f(x) \to \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\frac{\pi n x}{l},$$

а равенство Парсеваля приобретает вид

$$\frac{2}{l}\int\limits_{0}^{l} f^2(x)dx = \frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2.$$

Если функция $f(x)$ является нечетной, то произведение $f(x)\cos\dfrac{\pi n x}{l}$ также является нечетной функцией, а произведение $f(x)\sin\dfrac{\pi n x}{l}$ – четной. Вычислим коэффициенты Фурье нечетной функции

$$a_n = \frac{1}{l}\int\limits_{-l}^{l} f(x)\cos\frac{\pi n x}{l}dx = 0, \quad n = 0, 1, 2, 3, \ldots$$

$$b_n = \frac{1}{l}\int\limits_{-l}^{l} f(x)\sin\frac{\pi n x}{l}dx = \frac{2}{l}\int\limits_{0}^{l} f(x)\sin\frac{\pi n x}{l}dx, \quad n = 1, 2, 3, \ldots$$

Тригонометрический ряд Фурье нечетной функции содержит только синусы

$$f(x) \to \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\frac{\pi n x}{l},$$

а равенство Парсеваля приобретает вид

$$\frac{2}{l}\int\limits_{0}^{l} f^2(x)dx = \sum_{n=1}^{\infty} b_n^2.$$

9.6 Разложение функций, заданных на полупериоде, в ряд Фурье только по косинусам или только по синусам

Пусть функция $f(x)$ определена и кусочно-дифференцируема на отрезке $[0, l]$. Желая получить разложение этой функции в ряд Фурье, доопределим ее на промежутке $[-l, 0)$ произвольным образом, сохраняя лишь требование кусочной дифференцируемости. Это дает возможность получать различные разложения одной и той же функции в тригонометрические ряды Фурье на отрезке $[0, l]$.

Если определяя функцию на промежутке $[-l, 0)$, будем полагать, что $f(-x) = f(x)$ для всех $x \in (0, l]$, то получим четную функцию, тригонометрический ряд Фурье которой будет содержать только косинусы.

Если определяя функцию на промежутке $[-l, 0)$, будем полагать, что $f(-x) = -f(x)$ для всех $x \in (0, l]$, то получим нечетную функцию, тригонометрический ряд Фурье которой будет содержать только синусы.

Пример. Разложить функцию $f(x) = 3 - x$, заданную на отрезке $[0, 3]$ в тригонометрический ряд Фурье по косинусам и в тригонометрический ряд Фурье по синусам.

9.6.1 Разложение по косинусам

Доопределим функцию $f(x)$ на промежутке [-3,0) четным образом и продолжим ее на всю числовую ось как периодическую с периодом, равным 6.

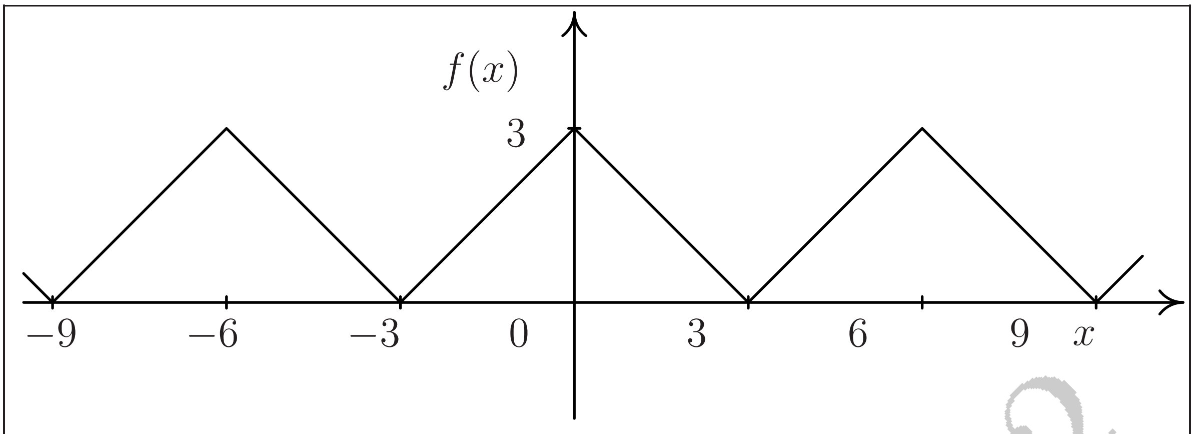

Рис. 4

Вычислим коэффициенты Фурье этой функции

$$a_0 = \frac{2}{3}\int\limits_0^3 (3-x)dx = 3, \quad \frac{a_0}{2} = \frac{3}{2},$$

$$a_n = \frac{2}{3}\int\limits_0^3 (3-x)\cos\frac{\pi n x}{3}\,dx =$$

$$= \frac{2}{3}\Big((3-x)\,\frac{3}{\pi n}\,\sin\frac{\pi n x}{3}\Big|_0^3 + \frac{3}{\pi n}\int\limits_0^3 \sin\frac{\pi n x}{3}\,dx\Big) =$$

$$= \frac{2}{\pi n}\Big(-\frac{3}{\pi n}\Big)\cos\frac{\pi n x}{3}\Big|_0^3 = \frac{6}{\pi^2 n^2}\,(1-\cos\pi n) =$$

$$= \frac{6}{\pi^2 n^2}(1-(-1)^n) =$$

$$= \begin{cases} 0, & \text{если } n = 2k \quad k = 1, 2, 3, \ldots \\ \dfrac{12}{(2k+1)^2\pi^2} & \text{если } n = 2k+1 \quad k = 0, 1, 2, 3, \ldots \end{cases}$$

Так как рассматриваемая функция является непрерывной всюду, то сумма ее тригонометрического ряда Фурье равна данной функции при всех x

$$f(x) = \frac{3}{2} + \frac{12}{\pi^2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\cos \dfrac{\pi(2k+1)x}{3}}{(2k+1)^2}.$$

Полагая в этом равенстве $x = 0$, получим

$$3 = \frac{3}{2} + \frac{12}{\pi^2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} \quad \text{или} \quad \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}.$$

Этот результат мы уже получали в другом примере. Выпишем для этого разложения равенство Парсеваля. С этой целью выпишем интеграл

$$\frac{2}{3} \int_0^3 (3-x)^2 dx = \frac{2}{3} \frac{(x-3)^3}{3} \Big|_0^3 = \frac{2}{9} \cdot 27 = 6.$$

Равенство Парсеваля принимает вид

$$6 = \frac{9}{2} + \frac{144}{\pi^4} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^4}, \quad \text{откуда} \quad \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^4} = \frac{\pi^4}{96}.$$

Итак, с помощью разложений функций в тригонометрические ряды Фурье, можно получать значения сумм некоторых числовых рядов.

9.6.2 Разложение по синусам

Доопределим функцию $f(x)$ на промежутке $[-3, 0)$ нечетным образом, изменим значение функции при $x = 0$, полагая $f(0) = 0$ и продолжим ее на всю числовую ось как периодическую с периодом, равным 6.

Согласно теореме Дирихле сумма тригонометрического ряда Фурье такой функции будет равна функции при всех x. Вычислим коэффициенты Фурье этой функции

$$
\begin{aligned}
&b_n = \frac{2}{3}\int\limits_0^3 (3-x)\sin\frac{\pi n x}{3}\,dx = \\
&= \frac{2}{3}\Big((3-x)\,\frac{3}{\pi n}\,\cos\frac{\pi n x}{3}\,\Big|_0^3 - \frac{3}{\pi n}\int\limits_0^3 \cos\frac{\pi n x}{3}\,dx\Big) = \\
&= \frac{2}{3}\Big(\frac{9}{\pi n} - \frac{9}{\pi^2 n^2}\sin\frac{\pi n x}{3}\,\Big|_0^3\Big) = \frac{6}{\pi n}, \quad n = 1, 2, 3, \ldots, \\
&f(x) = \frac{6}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin\dfrac{\pi n x}{3}}{n}.
\end{aligned}
$$

Полагая в этой формуле $\frac{3}{2}$, получим

$$
\frac{3}{2} = \frac{6}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin\dfrac{\pi n}{2}}{n}.
$$

Учитывая, что $\sin\dfrac{\pi n}{2} = \sin\pi k = 0$, если $n = 2k$ – четное число и что $\sin\dfrac{\pi n}{2} = \sin\dfrac{\pi(2k+1)}{2} = \sin\left(\dfrac{\pi}{2} + \pi k\right) = (-1)^k$, если $n = 2k+1$ – нечетное число, перепишем полученный результат в виде

$$
\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{2k+1} = \frac{\pi}{4}.
$$

Этот же результат можно получить, используя разложение функции $\operatorname{arctg} x$ в ряд Маклорена.

Выписывая равенство Парсеваля для данного разложения, получим значение суммы еще одного числового ряда

$$
6 = \frac{36}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}, \quad \text{откуда} \quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.
$$

Содержание