# I. Кратные интегралы

## 1. Двойной и тройной интегралы, их свойства. Геометрический смысл двойного интеграла

К понятию определенного интеграла приводит, в частности, задача о вычислении площади криволинейной трапеции. Задача о вычислении объема «криволинейного параллелепипеда» приводит к понятию двойного интеграла. Приведем точные определения.

Рассмотрим в плоскости ограниченную замкнутую область с границей Разобьем эту область какими-нибудь линиями на частей (теми же символами будем обозначать и площади соответствующих частей). Наибольшие расстояния между точками в каждой из этих частей обозначим Величину называют **диаметром** подобласти Выберем в каждой части точку (рис. 1).

  
Рис. 1

Пусть в области задана функция двух переменных Обозначим через значения этой функции в выбранных точках и составим следующую сумму:

*Определение 1*. Сумма вида называется **интегральной суммой** для функции в области

Замечание. С геометрической точки зрения (при ) интегральная сумма представляет собой сумму объемов цилиндров с основаниями и высотами

*Определение 2*. Если существует предел интегральных сумм при и не зависящий ни от способа разбиения области на части, ни от выбора точек в них, то он называется **двойным интегралом от функции**  **по области**  и обозначается

В этом случае говорят, что функция **интегрируема** в области

Относительно условий интегрируемости функции сформулируем (без доказательства) следующую теорему.

**Теорема.** Если функция непрерывна в ограниченной замкнутой области то она интегрируема в этой области.

### Свойства двойных интегралов

Большинство свойств двойного интеграла непосредственно вытекают из его определения:

1. Если функция интегрируема в то функция где тоже интегрируема в этой области и при этом
2. Если в области интегрируемы функции и то в этой области интегрируемы и функции и при этом
3. Если для интегрируемых в области функций и выполняется неравенство для всех из то
4. Если область разбита на две области и без общих внутренних точек и функция интегрируема в области то

Действительно, интегральную сумму по области можно представить в виде:

где разбиение области проведено так, что граница между и состоит из границ частей разбиения. Переходя затем к пределу при получим требуемое равенство.

1. Если функция интегрируема в области то функция также интегрируема в и имеет место неравенство

Действительно, откуда с помощью предельного перехода при получаем нужное неравенство.

1. где – площадь области

Доказательство этого утверждения получим, подставляя в интегральную сумму

1. Если интегрируемая в области функция удовлетворяет неравенству то

Доказательство проводится предельным переходом из очевидного неравенства

1. (**Теорема о среднем**) Если функция непрерывна в замкнутой области то в этой области существует такая точка что

или, что то же самое,

### Геометрический смысл двойного интеграла

Рассмотрим тело ограниченное частью поверхности, задаваемой графиком функции проекцией этого графика на плоскость и боковой цилиндрической поверхностью, полученной из вертикальных образующих, соединяющих точки границы поверхности с их проекциями (это то тело, которое в начале было названо «криволинейным параллелепипедом»).

Объем этого тела есть, очевидно, предел суммы объемов цилиндров, основаниями которых являются части области а высотами – отрезки длиной где точки принадлежат Другими словами, переходя к пределу при получим, что

  
Рис. 2

то есть двойной интеграл представляет собой объем тела

## 2. Вычисление двойного интеграла путем сведения его к повторному интегрированию

Рассмотрим область ограниченную графиками непрерывных функций определенных на отрезке и прямыми и (см. рис. 3).

  
Рис. 3

В этом случае двойной интеграл вычисляется по формуле

т. е. сводится к последовательному вычислению (справа налево) обычных интегралов, или, как говорят, к повторному интегрированию.

Традиционно выражение справа записывают так

Если область можно разбить линиями на конечное число подобластей, каждая из которых имеет вид как на рис. 3, то используя свойство 4 двойного интеграла, мы снова сводим его вычисление к повторному интегрированию.

Пример 1.

Вычислим двойной интеграл от функции по области, представляющей собой треугольник с вершинами в точках и (рис. 4).

  
Рис. 4

Здесь

Тогда

## 3. Вычисление двойного интеграла в полярных координатах

Введем на плоскости криволинейную систему координат, называемую **полярной**. Она состоит из точки (полюса) и выходящего из него луча (полярной оси).

|  |  |
| --- | --- |
| Рис. 5 | Рис. 6 |

Координатами точки в этой система (рис. 5) будут длина отрезка – полярный радиус и угол между и полярной осью: Отметим, что для всех точек плоскости, кроме полюса, а полярный угол будем считать положительным при измерении его в направлении против часовой стрелки и отрицательным – при измерении в противоположном направлении.

**Замечание**. Если ограничить значения интервалом или то каждой точке плоскости соответствует единственная пара координат В других случаях можно считать, что может принимать любые значения, то есть полярный угол определяется с точностью до слагаемого, кратного

Связь между полярными и декартовыми координатами точки можно задать, если совместить начало декартовой системы координат с полюсом, а положительную полуось – с полярной осью (рис. 6).

Тогда Отсюда

Правильной областью в полярных координатах назовем такую область, границу которой каждый луч, выходящий из полюса, пересекает не более, чем в двух точках (рис. 7).

Зададим в области ограниченной кривыми и где непрерывную функцию Разобьем область на части ограниченные лучами и выходящими из полюса, и дугами окружностей и с центром в полюсе, и составим интегральную сумму где – произвольная точка, принадлежащая Найдем площадь части не пересекаемой границей области, как разность площадей двух секторов:

  
Рис. 7

где Учитывая, что площади частей, пересекаемых границей области, стремятся к нулю при и получим:

Пример 2.

Выведем с использованием двойного интеграла формулу для площади круга радиуса с центром в начале координат:

Пример 3.

Вычислим, используя полярные координаты, двойной интеграл

где – часть кругового сектора единичного радиуса с центром в начале координат, расположенная в 1-м квадранте.

Заданный интеграл в полярных координатах по указанной области имеет вид:

### Тройной интеграл

Понятие тройного интеграла вводится по аналогии с двойным интегралом.

Пусть в пространстве задана некоторая область ограниченная замкнутой поверхностью Зададим в этой замкнутой области непрерывную функцию Затем разобьем область на произвольные части считая объем каждой части равным и составим интегральную сумму вида

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | (1) |

где точка принадлежит Пусть – наибольшее расстояние между двумя точками любой части области Найдем предел интегральной суммы при неограниченном увеличении числа элементов разбиения при условии, что каждый элементарный объем стягивается в точку, т. е. максимальный диаметр каждой подобласти стремится к нулю.

*Определение 3.* Предел при интегральных сумм (1), не зависящий от способа разбиения области и выбора точек в каждой подобласти этой области, называется **тройным интегралом от функции по области**

**Замечание**. Все сформулированные ранее свойства двойного интеграла распространяются на тройной интеграл.

## 4. Вычисление тройного интеграла в декартовых координатах

Процедура вычисления тройного интеграла аналогична соответ­ствующей операции для двойного интеграла.

Рассмотрим область ограниченную снизу и сверху графиками функций и определенных в области которая имеет вид, изображенный на рис. 3, т. е. она ограничена кривыми и (рис. 8).

  
Рис. 8

Пусть в области задана функция Тогда справедлива следующая формула

Пример.

Вычислим интеграл где – треугольная пирамида с вершинами в точках Ее проекцией на плоскость является треугольник с вершинами Снизу область ограничена плоскостью а сверху – плоскостью Перейдем к трехкратному интегралу:

Множители, не зависящие от переменной интегрирования, можно вынести за знак соответствующего интеграла:

## 5. Криволинейные системы координат в трехмерном пространстве

### 1. Цилиндрическая система координат

Цилиндрические координаты точки – это полярные координаты проекции этой точки на плоскость и аппликата данной точки (рис. 9).

|  |  |
| --- | --- |
| Рис. 9 | Рис. 10 |

Формулы перехода от цилиндрических координат к декартовым можно задать следующим образом:

### 2. Сферическая система координат

В сферических координатах положение точки в пространстве определяется линейной координатой – расстоянием от точки до начала декартовой системы координат (или полюса сферической системы), – полярным углом между положительной полуосью и проекцией точки на плоскость и – углом между положительной полуосью оси и отрезком (рис. 10). При этом

Зададим формулы перехода от сферических координат к декартовым:

## 6. Якобиан и его геометрический смысл

Рассмотрим общий случай замены переменных в двойном интеграле. Пусть в плоскости дана область ограниченная линией Предположим, что и являются однозначными и непрерывно дифференцируемыми функциями новых переменных и

Рассмотрим прямоугольную систему координат точка которой соответствует точке из области Все такие точки образуют в плоскости область ограниченную линией Функции устанавливают **взаимно однозначное соответствие** между точками областей и При этом линиям и в плоскости будут соответствовать некоторые линии в плоскости

  
Рис. 11

Рассмотрим в плоскости прямоугольную площадку ограниченную прямыми Ей будет соответствовать криволинейная площадка в плоскости (рис. 11). Площади рассматриваемых площадок тоже будем обозначать и При этом Найдем площадь Обозначим вершины этого криволинейного четырехугольника где

Заменим малые приращения и соответствующими дифферен­циалами. Тогда

При этом четырехугольник можно считать параллелограм­мом и определить его площадь по формуле из аналитической геометрии:

|  |  |
| --- | --- |
|  | (\*) |

*Определение* *6*. Определитель называется **функциональным определителем** или **якобианом** функций и

Другая форма записи якобиана:

Переходя к пределу при в равенстве (\*), получим, что

то есть модуль якобиана есть предел отношения площадей бесконечно малых площадок и

## 7. Замена переменных в двойном и тройном интегралах

Пусть в области задана непрерывная функция каждому значению которой соответствует то же самое значение функции в области где

Рассмотрим интегральную сумму

где интегральная сумма справа берется по области (здесь ). Переходя к пределу при получим **формулу преобразования координат в двойном интеграле**:

Аналогичным образом можно вывести подобную формулу для тройного интеграла:

где

а область пространства отображается в область пространства

### Переход к цилиндрическим и сферическим координатам в тройном интеграле

Используя предыдущие формулы можно выписать якобианы перехода от декартовых координат к цилиндрическим и сферическим:

1) для цилиндрических координат

2) для сферических координат

Тогда формулы перехода к цилиндрическим или сферическим координатам в тройном интеграле будут выглядеть так:

где смысл обозначений понятен из предыдущего текста.

Пример.

Вычислим интеграл от функции по области, ограниченной поверхностями

Пример.

Пусть подынтегральная функция а область интегрирования – шар радиуса с центром в начале координат. Тогда