Изолированные особые точки. Вычет в изолированной особой точке.

Центральным моментом в обучение ТФКП является понятие изолированной особой точки, определение её типа и нахождения в ней вычета. Введение двух типов определения: по поведению функции в окрестности особой точки ( в дальнейшем –« по пределу») и по виду главной части ряда Лорана, дает большой объем информации , что создает трудности в восприятии и запоминания материала. Хорошим подспорьем (проверенным в течение многих лет на практике) является следующая таблица, позволяющая систематизировать знания и облегчить процесс усвоения материала.

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| № | Вид особой изолированной точки  | Определение изолированной особой точки через предел | Определение изолированной особой точки по ряду Лорана | Нахождение вычета в изолированной особой точке |
|  |  | а) | б) | в) |
| 1 | устранимая особая точка |  | Ряд Лорана состоит только из правильной части. Главная часть ряда Лорана отсутствует. Функция  |  |
| 2 |  простой полюс (полюс первого порядка) |  | Главная часть ряда Лорана имеет максимум одно слагаемое . Функция |   |
| 3 |  полюс порядка «К» |  | Главная часть ряда Лорана имеет максимум «К» слагаемых . Функция |  |
| 4 |  существен-но особая точка | Не существует предела функции f(z) ни конечного, ни бесконечного при  | Главная часть ряда Лорана имеет бесконечное число слагаемых. Функция |  |

В качестве комментариев к таблице можно пояснить, в каких случаях лучше пользоваться какой колонкой(столбцом).

Если устранимая особая точка и легко считается , например

то проще воспользоваться определением 1а), чем разлагать в ряд Лорана 1б).

В случае если полюс , то утверждение, что не дает информации о порядке полюса. В тоже время подобранный порядок «К» множителя позволяет определить порядок полюса

Например, , тогда очевидно, что домножение функции на приведет к конечному значению в пределе

Т.е. особая точка z=3i является полюсом 2-го порядка.

В этом случае очень удобна известная теорема:

**Теорема1.** *Если функция представима в виде и точка является нулем порядка для функции и нулем порядка для функции , то*

*1. если , то есть порядок нуля функции в точке ,*

*2. если , то есть порядок полюса функции в точке ,*

*3. если , то – устранимая особая точка функции f(z).*

Рассмотрим пример: Найти особые точки функции и установить их тип

Решение: особыми точками функции f(z) являются . В точке

числитель и знаменатель f(z) обращаются в нуль. Для числителя P(z)=Cos(z-2) -1 число является нулем 2-го порядка, так как и (как известно, порядок нуля функции равен порядку первой, отличной от нуля производной). Знаменатель Q(z)= представим в виде

 Q(z)= и .Это означает, что порядок нуля знаменателя равен 2. Следовательно по теореме m=2 , и z=2-устранимая особая точка.

В точке запишем функцию в виде , где , ,т.е. - полюс 3-го порядка.

Ответ задачи: z=2-устранимая особая точка и - полюс 3-го порядка.

С другой стороны, если . полюс и функция легко раскладывается в ряд Лорана, то удобнее использовать 2б) и 3б).

По-другому обстоит дело, если существенно особая точка. Как правило, значительную трудность представляет доказательство не существования предела функции, поэтому разумнее воспользоваться разложением в ряд Лорана.

Рассмотрим функцию . Полагая t= , получим лорановское разложение функции f(z) в окрестности точки

Разложение содержит бесконечное число членов ряда с отрицательными степенями z+5, следовательно , точка является существенной особой точкой функции f(z).

В какой-то мере представленная в таблице классификация является «шпаргалкой». Но цель, оправдывает средства, если в результате мы добиваемся понимания, усвоения и дальнейшего применения полученных знаний при изучении курса, а именно, в основной теореме о вычетах и её приложениях.